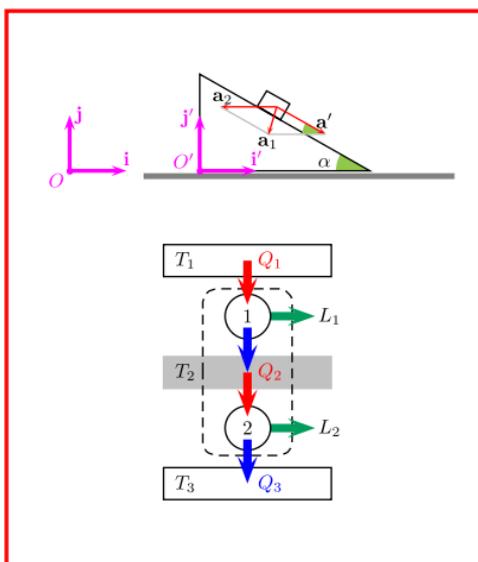


Problemi di Fisica

Meccanica
Termodinamica
Elettrostatica

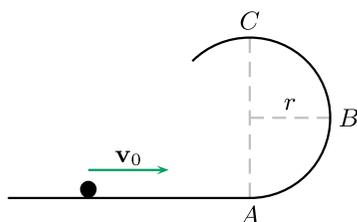


Vol. 1/3

LORENZO ROI

Problema 1.7

Una pallina di massa $m = 200\text{ g}$ è lanciata con velocità $v_0 = 8\text{ m/s}$ lungo un piano orizzontale verso una guida circolare di raggio $r = 50\text{ cm}$ (figura). Nell'ipotesi di vincoli lisci, determinare: a) la reazione vincolare in A, B, C , b) la velocità minima $v_{0,min}$ affinché la pallina arrivi in C mantenendo sempre il contatto con la guida.



Soluzione. a) Le forze agenti sulla pallina sono in ogni punto della sua traiettoria la forza peso \mathbf{P} e la reazione vincolare \mathbf{N} . Nel tratto orizzontale il moto è rettilineo uniforme per cui dev'essere $\mathbf{P} + \mathbf{N} = \mathbf{0}$, relazione che comunque non vale più a partire dal punto A in quanto già in questo punto la pallina dev'essere soggetta ad una accelerazione che ne modifichi la traiettoria rettilinea.

Le forze in A sono quindi disposte come in fig. 1 cosicché, introdotto il sistema cartesiano di origine O e versori \mathbf{i} e \mathbf{j} , la seconda legge della dinamica

$$\mathbf{P} + \mathbf{N} = m\mathbf{a}, \tag{1}$$

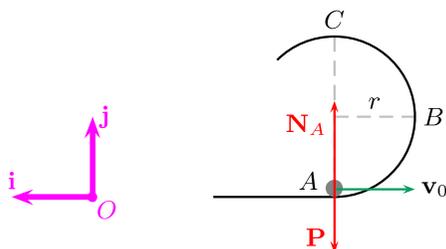


Fig. 1. Forze nel punto A .

si riscrive come

$$(-mg)\mathbf{j} + N_A\mathbf{j} = (ma_A)\mathbf{j}, \tag{2}$$

e quindi, in termini scalari

$$-mg + N_A = ma_A, \tag{3}$$

dove l'accelerazione a_A dev'essere centripeta e con verso concorde al versore \mathbf{j} . Questa accelerazione dipende dalla velocità secondo la ben nota relazione

$$a_A = \frac{v_0^2}{r} \quad (4)$$

per cui la (3) diviene

$$-mg + N_A = \frac{mv_0^2}{r} \quad (5)$$

da cui possiamo ottenere la reazione vincolare

$$N_A = \frac{mv_0^2}{r} + mg. \quad (6)$$

Questa espressione rende evidente come la reazione vincolare nel punto A debba essere maggiore della forza peso diversamente da quanto avveniva nei punti precedentemente occupati dalla pallina. Il suo valore numerico è $N_A = 27,56 \text{ N}$.

Nel punto B le forze sono disposte come nella figura 2 per cui la forza centripeta responsabile del moto circolare della pallina proviene dal solo contributo della reazione vincolare.

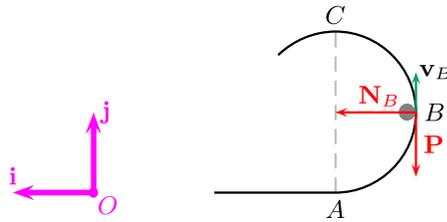


Fig. 2. Forze nel punto B .

La legge (1) nella direzione del versore \mathbf{i} è

$$N_B \mathbf{i} = (ma_B) \mathbf{i} \quad (7)$$

e questa, in termini del modulo della velocità incognita v_B , si riduce alla

$$N_B = \frac{mv_B^2}{r}. \quad (8)$$

Per determinare la velocità incognita v_B applichiamo l'altra fondamentale legge che si affianca alla seconda della dinamica ossia il teorema dell'energia cinetica. A tale scopo intendiamo quale istante iniziale quello in cui la pallina possiede la velocità v_0 mentre come istante finale consideriamo quando questa raggiunge il punto B . Se L_P e L_N sono rispettivamente i lavori della forza peso e della reazione vincolare, tale legge implica

$$L_P + L_N = \Delta K$$

dove ΔK rappresenta la variazione dell'energia cinetica tra gli istanti iniziale e finale. Questa si particolarizza in

$$-\Delta U + 0 = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (9)$$

in quanto la forza peso è conservativa per cui

$$L_P = -\Delta U = -(mgy_B - mgy_A) = -mgr, \quad (10)$$

con $y_B = r$ e $y_A = 0$. Il lavoro L_N della reazione vincolare è invece nullo in quanto, essendo il vincolo liscio e quindi privo di attrito, tale forza è sempre perpendicolare allo spostamento infinitesimo del corpo. Unendo la (9) con la (10) abbiamo

$$-mgr = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

da cui ricaviamo

$$v_B^2 = v_0^2 - 2gr. \quad (11)$$

La sostituzione di questo risultato nella (8) permette di calcolare la reazione in B

$$N_B = \frac{mv_B^2}{r} = \frac{mv_0^2}{r} - 2mg = 21,68 \text{ N}. \quad (12)$$

Procediamo nello stesso modo per individuare la reazione N_C . Nel punto C entrambe le forze coinvolte nella (1) contribuiscono alla forza centripeta (fig. 3).

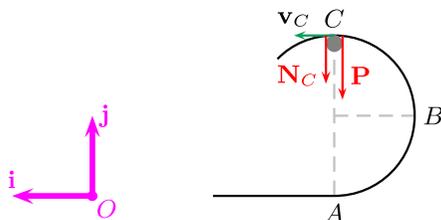


Fig. 3. Forze nel punto C .

In tal caso la seconda legge della dinamica diviene

$$(-mg)\mathbf{j} - N_C\mathbf{j} = (-ma_C)\mathbf{j} \quad (13)$$

dove abbiamo esplicitato il segno dell'accelerazione per cui $a_C = v_C^2/r$ ne rappresenta il modulo. In termini scalari la precedente si scrive come

$$-mg - N_C = -\frac{mv_C^2}{r} \quad (14)$$

e quindi

$$N_C = \frac{mv_C^2}{r} - mg. \quad (15)$$

Determiniamo la velocità incognita v_C applicando ancora il teorema dell'energia cinetica nella forma rappresentata dalla (9) dove al punto B sostituiamo il punto C ossia

$$-(mgy_C - mgy_A) + 0 = \frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

dalla quale discende ($y_C = 2r$)

$$v_C^2 = v_0^2 - 4gr \quad (16)$$

che, sostituita nella (15), dà

$$N_C = \frac{mv_0^2}{r} - 4mg - mg = \frac{mv_0^2}{r} - 5mg = 15,80 \text{ N}. \quad (17)$$

b) Affinché la pallina rimanga a contatto della guida anche nel punto C , la reazione vincolare dev'essere collegata alla velocità v dalla relazione (14) che riscriviamo in forma più generale come

$$-mg - N_C = -\frac{mv^2}{r} \implies mg + N_C = \frac{mv^2}{r}. \quad (18)$$

Considerata la velocità v come una grandezza variabile, il valore minimo del secondo membro e quindi della velocità in C , viene raggiunto in corrispondenza del minimo del primo membro. D'altra parte l'unica grandezza variabile a primo membro è la reazione vincolare per cui il valore minimo di questo membro viene raggiunto quando la reazione vincolare della guida si annulla. In questo caso è la sola forza peso che contribuisce alla forza centripeta. Pertanto la velocità minima in C che assicura un moto su traiettoria circolare è

$$mg + 0 = \frac{mv_{C,min}^2}{r} \implies v_{C,min}^2 = gr. \quad (19)$$

Inserito tale risultato nel teorema dell'energia cinetica dove la variazione di energia cinetica lega la velocità iniziale incognita $v_{0,min}$ con quella finale $v_{C,min}$, ne discende che

$$\frac{1}{2}mv_{C,min}^2 - \frac{1}{2}mv_{0,min}^2 = -(mgy_C - mgy_A)$$

dalla quale per (19)

$$\frac{1}{2}mgr - \frac{1}{2}mv_{0,min}^2 = -2mgr$$

e quindi, in definitiva

$$v_{0,min}^2 = 5gr \implies v_{0,min} = \sqrt{5gr} = 4,95 \text{ m/s}. \quad (20)$$

Nota 1. Le richieste del problema e quanto poi segue mostrano come la reazione vincolare dipenda dalla posizione della sferetta lungo la guida circolare. Volendo determinare la dipendenza della reazione vincolare dal punto occupato dalla pallina, definiamo l'angolo orientato α che ne individua la posizione e mostrato nella fig. 4. Con tale scelta la componente della forza peso P_{\perp} avente direzione radiale è espressa dalla

$$P_{\perp} = P \sin \alpha = mg \sin \alpha \quad (21)$$

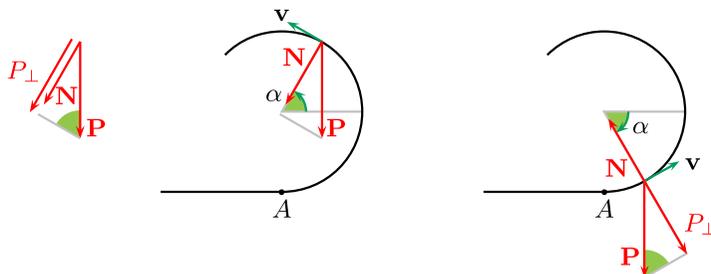


Fig. 4. Reazione vincolare, peso e risultante centripeta.

e tale relazione vale per ogni $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ in quanto in corrispondenza dei valori negativi di α pure tale componente risulta opposta ad \mathbf{N} (fig. 4). Pertanto la seconda legge della dinamica lungo la direzione radiale e in un generico punto della guida circolare si esprime come

$$N + mg \sin \alpha = \frac{mv^2}{r} \quad (22)$$

dove per determinare la dipendenza di N dall'angolo, cioè $N(\alpha)$, non rimane che trovare la velocità v con l'applicazione del teorema dell'energia cinetica. Se quindi $(x, y) \equiv (r \cos \alpha, r + r \sin \alpha)$ sono le coordinate di un punto generico della guida, scriviamo il teorema come

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -(mgy - 0) \implies \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgr(1 + \sin \alpha) \quad (23)$$

da cui la velocità cercata è

$$v^2 = v_0^2 - 2gr(1 + \sin \alpha). \quad (24)$$

Sostituito quest'ultimo risultato nella (22)

$$N + mg \sin \alpha = \frac{mv_0^2}{r} - 2mg(1 + \sin \alpha),$$

ne discende la dipendenza della reazione vincolare dall'angolo

$$N(\alpha) = \frac{mv_0^2}{r} - mg(2 + 3 \sin \alpha). \quad (25)$$

Con tale risultato ritroviamo i valori precedenti della reazione ponendo

$$\begin{aligned} \alpha = -\frac{\pi}{2} &\implies N_A = \frac{mv_0^2}{r} + mg \\ \alpha = 0 &\implies N_B = \frac{mv_0^2}{r} - 2mg \\ \alpha = \frac{\pi}{2} &\implies N_C = \frac{mv_0^2}{r} - 5mg. \end{aligned}$$

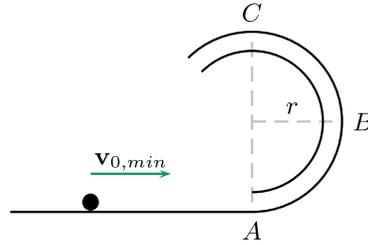


Fig. 5. Binario liscio semicircolare.

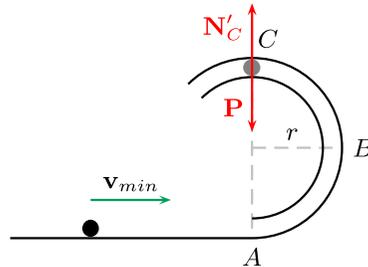


Fig. 6. Punto C del binario semicircolare e forze.

Nota 2. Se la guida fosse formata da un binario liscio come mostrato nella figura 5, la pallina nel punto C non potrebbe cadere e staccarsi da tale vincolo.

In questo caso potrebbe raggiungere il punto C anche con velocità nulla in quanto il vincolo, in grado di fornire una reazione rivolta verso l'alto, applicherebbe una forza opposta alla forza peso: la figura 6 rappresenta questa situazione limite con $v_C = 0$.

Sulla base di questa osservazione, la velocità iniziale minima v_{min} da impartire nel tratto orizzontale discende dalla sola applicazione del teorema dell'energia cinetica. Difatti, considerato ancora nullo il lavoro della reazione vincolare in quanto il vincolo è liscio, ne segue

$$\frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_{min}^2 = -(2mgr - 0)$$

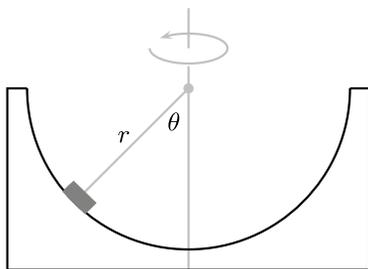
dalla quale con $v_C = 0$ otteniamo

$$v_{min}^2 = 4gr \quad \Rightarrow \quad v_{min} = \sqrt{4gr} = 4,43 \text{ m/s,}$$

risultato quest'ultimo evidentemente diverso dal precedente (20) e che mostra come sia sufficiente una minore velocità per raggiungere, con un tale vincolo, il punto più elevato.

Problema 1.8

Una scodella semisferica di raggio r (figura) ruota attorno al proprio asse di simmetria verticale con velocità angolare ω . Un piccolo blocco occupa durante la rotazione una posizione il cui raggio forma un angolo θ con la verticale e ruota assieme alla scodella



senza scivolare per la presenza di una forza d'attrito tra le superfici a contatto di coefficiente μ . Determinare l'intervallo della velocità angolare entro il quale il blocco mantiene la propria posizione.

Soluzione. Nel sistema inerziale di laboratorio le forze agenti sul blocco (che supponiamo abbia massa m) sono evidentemente la forza peso \mathbf{P} , la reazione vincolare \mathbf{N} e la forza d'attrito \mathbf{A} . Per le prime due sono note le direzioni e i versi mentre il verso della forza d'attrito dipende dalla tendenza del corpo di muoversi verso il basso o verso l'alto e ciò in funzione del valore più o meno alto della velocità angolare. In entrambi i casi la risultante \mathbf{R} dovrà essere una forza centripeta orizzontale in quanto il blocco, nell'ipotesi che non scivoli, segue una traiettoria circolare di raggio $r_c = r \sin \theta$ con moto uniforme (fig. 1).

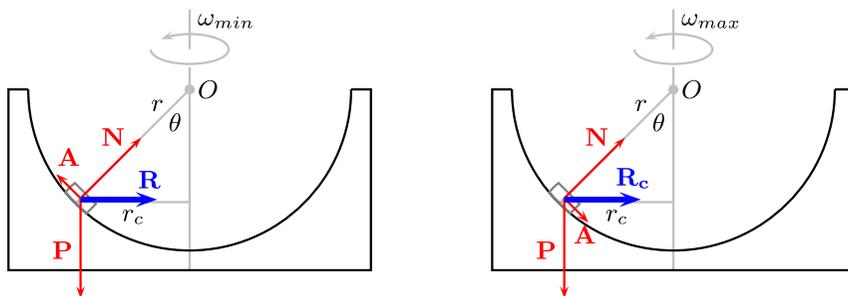


Fig. 1. Forze agenti sul blocco in moto circolare uniforme e velocità angolare.

Indipendentemente dal verso della forza d'attrito, la seconda legge della dinamica si scrive

$$\mathbf{P} + \mathbf{N} + \mathbf{A} = m\mathbf{a}_c \quad (1)$$

dove la risultante centripeta è rappresentata dalla $m\mathbf{a}_c = \mathbf{R}$.

Scegliamo di proiettare quest'ultima nelle direzioni indicate dai vettori \mathbf{i} e \mathbf{j} di figura 2, la prima direzione parallela al raggio che collega il blocco con il centro O della scodella, la seconda a questa perpendicolare. Poiché il modulo dell'accelerazione centripeta si può scrivere come

$$a_c = \omega^2 r_c = \omega^2 (r \sin \theta) = \omega^2 r \sin \theta, \quad (2)$$

nel caso la velocità angolare raggiunga il suo valore minimo ω_{min} con ancora il blocco solidale alla scodella, la (1) si suddivide nelle due componenti (fig. 2 sx)

$$\begin{cases} N - mg \cos \theta = m a_c \sin \theta, \\ A - mg \sin \theta = -m a_c \cos \theta \end{cases} \quad (3)$$

per cui, in base alla (2), è pure

$$\begin{cases} N - mg \cos \theta = m\omega_{min}^2 r \sin^2 \theta \\ A - mg \sin \theta = -m\omega_{min}^2 r \sin \theta \cos \theta. \end{cases} \quad (4)$$

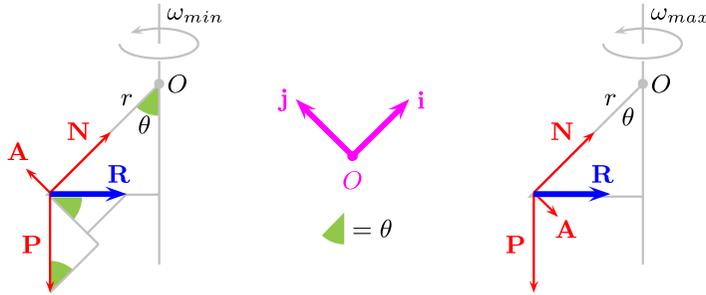


Fig. 2. Forze agenti sul blocco e risultante centripeta.

Nel caso in cui la velocità angolare assuma il suo valore massimo ω_{max} (fig. 2 dx) per cui il blocco tenderebbe a salire, l'unica forza che modifica il suo verso è l'attrito per cui il verso è ora opposto al precedente e quindi modifichiamo la (3) in

$$\begin{cases} N - mg \cos \theta = ma'_c \sin \theta, \\ -A - mg \sin \theta = -ma'_c \cos \theta \end{cases} \quad (5)$$

per cui

$$\begin{cases} N - mg \cos \theta = m\omega_{max}^2 r \sin^2 \theta \\ -A - mg \sin \theta = -m\omega_{max}^2 r \sin \theta \cos \theta. \end{cases} \quad (6)$$

Poiché il valore massimo della forza d'attrito è collegato al modulo della reazione vincolare N dalla

$$A = \mu N, \quad (7)$$

riscriviamo la (4) come

$$\begin{cases} N - mg \cos \theta = m\omega_{min}^2 r \sin^2 \theta \\ \mu N - mg \sin \theta = -m\omega_{min}^2 r \sin \theta \cos \theta \end{cases} \quad (8)$$

o anche

$$\begin{cases} N = mg \cos \theta + m\omega_{min}^2 r \sin^2 \theta \\ \mu N = mg \sin \theta - m\omega_{min}^2 r \sin \theta \cos \theta. \end{cases} \quad (9)$$

Eliminato il modulo della reazione vincolare N rapportando membro a membro delle due equazioni precedenti

$$\frac{\mu N}{N} = \frac{mg \sin \theta - m\omega_{min}^2 r \sin \theta \cos \theta}{mg \cos \theta + m\omega_{min}^2 r \sin^2 \theta}$$

e eliminato il fattore comune m , discende

$$\mu(g \cos \theta + \omega_{min}^2 r \sin^2 \theta) = g \sin \theta - \omega_{min}^2 r \sin \theta \cos \theta$$

e quindi

$$\omega_{min}^2 (\mu r \sin^2 \theta + r \sin \theta \cos \theta) = g \sin \theta - \mu g \cos \theta.$$

Con un ultimo passaggio risolviamo nell'incognita ω_{min}

$$\omega_{min}^2 = \frac{g(\sin \theta - \mu \cos \theta)}{r \sin \theta (\cos \theta + \mu \sin \theta)}$$

dalla quale abbiamo un primo risultato

$$\omega_{min} = \sqrt{\frac{g(\sin \theta - \mu \cos \theta)}{r \sin \theta (\cos \theta + \mu \sin \theta)}} \quad (10)$$

Allo stesso modo e a partire dalla (6) che riportiamo come

$$\begin{cases} N = mg \cos \theta + m\omega_{max}^2 r \sin^2 \theta \\ -\mu N - mg \sin \theta = -m\omega_{max}^2 r \sin \theta \cos \theta, \end{cases} \quad (11)$$

discendono le espressioni

$$\begin{cases} N = mg \cos \theta + m\omega_{max}^2 r \sin^2 \theta \\ \mu N = -mg \sin \theta + m\omega_{max}^2 r \sin \theta \cos \theta \end{cases} \quad (12)$$

$$\frac{\mu N}{N} = \frac{-mg \sin \theta + m\omega_{max}^2 r \sin \theta \cos \theta}{mg \cos \theta + m\omega_{max}^2 r \sin^2 \theta}$$

$$\mu(g \cos \theta + \omega_{max}^2 r \sin^2 \theta) = -g \sin \theta + \omega_{max}^2 r \sin \theta \cos \theta$$

$$\omega_{max}^2 (\mu r \sin^2 \theta - r \sin \theta \cos \theta) = -g \sin \theta - \mu g \cos \theta$$

$$\omega_{max}^2 = \frac{g(\sin \theta + \mu \cos \theta)}{r \sin \theta (\cos \theta - \mu \sin \theta)}$$

ed infine

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{g(\sin \theta + \mu \cos \theta)}{r \sin \theta (\cos \theta - \mu \sin \theta)}}. \quad (13)$$

L'intervallo richiesto è quindi

$$\sqrt{\frac{g(\sin \theta - \mu \cos \theta)}{r \sin \theta (\cos \theta + \mu \sin \theta)}} \leq \omega \leq \sqrt{\frac{g(\sin \theta + \mu \cos \theta)}{r \sin \theta (\cos \theta - \mu \sin \theta)}} \quad (14)$$

Nota. Alle medesime relazioni si può giungere sostituendo il sistema inerziale di laboratorio con un sistema non inerziale in rotazione e solidale alla scodella e al blocco. In un tale sistema alle forze già descritte vanno aggiunte le forze apparenti e queste si riducono alla sola forza centrifuga in quanto il blocco è in quiete.

La situazione a riguardo delle forze agenti e agli assi scelti è riportata, nei due casi estremi, nella figura 3, cosicché la seconda legge della dinamica diviene ora

$$\mathbf{P} + \mathbf{N} + \mathbf{A} + \mathbf{F}_c = \mathbf{0} \quad (15)$$

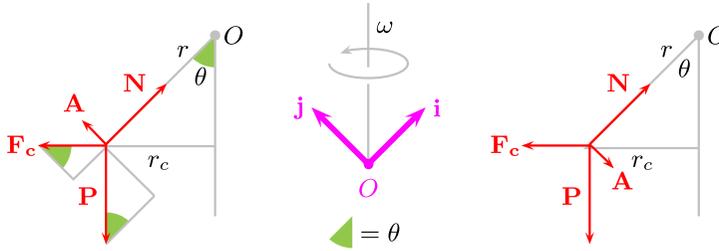


Fig. 3. Forze agenti sul blocco e risultante nulla nel sistema non inerziale.

dove \mathbf{F}_c rappresenta la forza centrifuga di modulo

$$F_c = m\omega^2 r_c = m\omega^2 r \sin \theta. \quad (16)$$

Proiettando la (15) sugli assi del sistema non inerziale nell'ipotesi si abbia ω_{min} (fig. 3 sx) otteniamo le coppie di relazioni

$$\begin{cases} -mg \cos \theta + N - F_c \sin \theta = 0 \\ A + F_c \cos \theta - mg \sin \theta = 0 \end{cases}$$

che, con la posizione $A = \mu N$ e assieme alla (16) si riduce alla

$$\begin{cases} N = mg \cos \theta + m\omega_{min}^2 r \sin^2 \theta \\ \mu N = mg \sin \theta - m\omega_{min}^2 r \sin \theta \cos \theta \end{cases} \quad (17)$$

del tutto simile alla (8) per cui, con gli stessi passaggi algebrici, si giunge al risultato (10).

Nel caso l'attrito abbia il verso opposto e quindi si opponga al moto del blocco verso le parti più esterne della scodella (fig. 3 dx), il limite superiore per la velocità angolare ω_{max} discende ancora dalla proiezione della (15) nelle direzioni scelte per il sistema non inerziale. Pure qui si modifica solo la componente associata all'attrito

$$\begin{cases} -mg \cos \theta + N - F_c \sin \theta = 0 \\ -A + F_c \cos \theta - mg \sin \theta = 0, \end{cases}$$

per cui, noto il valore limite $A = \mu N$, deduciamo la coppia di equazioni

$$\begin{cases} N = mg \cos \theta + m\omega_{max}^2 r \sin^2 \theta \\ \mu N = -mg \sin \theta + m\omega_{max}^2 r \sin \theta \cos \theta. \end{cases}$$

Quest'ultimo sistema coincide con il precedente (12) per cui ritroviamo il medesimo intervallo (14).

Problema 2.7

Una mole di azoto, N_2 , contenuta in un cilindro con pistone mobile, inizialmente alla temperatura di 20°C e alla pressione di 5 atm si espande adiabaticamente e quasi-staticamente fino a raggiungere la pressione esterna di 1 atm . Il gas subisce quindi un riscaldamento a pressione costante così da raggiungere ancora la temperatura iniziale di 20°C . Durante tale fase il gas si espande. Raggiunta la temperatura iniziale si riscalda ulteriormente il gas mantenendone costante il volume finché raggiunge la pressione di 5 atm . Infine viene compresso a pressione costante per riportare il gas alla situazione iniziale. a) Costruire un grafico del ciclo nel piano PV ; b) determinare il lavoro svolto in ogni fase del ciclo; c) determinare il lavoro fatto o subito dal sistema durante tutto il ciclo; d) determinare il calore ceduto e assorbito durante il ciclo.

Soluzione. a) I dati del problema sono

$$\begin{aligned} n &= 1 \text{ mol}, & T_A &= T_C = 293 \text{ K} (= 20^\circ\text{C}), \\ p_A &= p_D = 5 \text{ atm}, & p_B &= p_C = 1 \text{ atm} = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}, \end{aligned}$$

dove gli indici identificano i punti nel piano PV che descrivono il ciclo percorso dal gas rappresentato nella fig. 1.

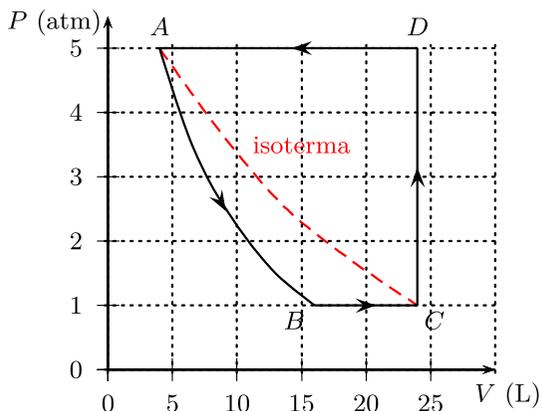


Fig. 1. Il ciclo del gas e isoterma per A e C.

In particolare,

$A \rightarrow B$ identifica l'espansione adiabatica dell'azoto con una conseguente diminuzione della pressione e della temperatura;

$B \rightarrow C$ una successiva espansione isobara accompagnata da un aumento di temperatura che ritorna al valore iniziale;

$C \rightarrow D$ un aumento isocoro della temperatura che riporta la pressione al valore iniziale e, infine,

$D \rightarrow A$ una compressione isobara che riporta il sistema allo stato iniziale.

Procediamo determinando innanzitutto i parametri che caratterizzano lo stato del gas nei punti A , B , C e D .

Per determinare il volume V_A applichiamo l'equazione di stato dei gas perfetti

$$A: p_A V_A = nRT_A \quad \Longrightarrow \quad V_A = \frac{nRT_A}{p_A} = 4,807 \times 10^{-3} \text{ m}^3 = 4,8 \text{ L}, \quad (1)$$

mentre per conoscere la temperatura T_B e il volume V_B dovremo utilizzare, in aggiunta all'equazione dei gas, la legge che descrive le adiabatiche di un gas perfetto. Questa assicura la costanza dei prodotti

$$p_A V_A^\gamma = p_B V_B^\gamma \quad (2)$$

con $\gamma = 7/5$ per un gas biatomico qual è l'azoto (si veda pure il problema 2.6). Ne segue che

$$V_B^\gamma = V_A^\gamma \left(\frac{p_A}{p_B} \right) \quad \Longrightarrow \quad V_B = V_A \left(\frac{p_A}{p_B} \right)^{1/\gamma} = 1,5176 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \approx 15,2 \text{ L}. \quad (3)$$

Ora con la legge $p_B V_B = nRT_B$ determiniamo la temperatura

$$B: T_B = \frac{p_B V_B}{nR} = 185 \text{ K}. \quad (4)$$

Poiché lo stato C è caratterizzato da $p_C = p_B$ e $T_C = T_A$ l'equazione di stato permette di conoscerne il volume

$$C: p_C V_C = nRT_C \quad \Longrightarrow \quad p_B V_C = nRT_A$$

e quindi

$$V_C = \frac{nRT_A}{p_B} = 2,4036 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \approx 24 \text{ L}. \quad (5)$$

Infine, la temperatura dello stato D è ancora data dalla legge $p_D V_D = nRT_D$ considerando che $p_D = p_A$ e $V_D = V_C$ cosicché abbiamo

$$D: T_D = \frac{p_A V_C}{nR} = 1465 \text{ K}. \quad (6)$$

b) Per determinare i lavori svolti nelle varie fasi applichiamo il primo principio della termodinamica che per l'espansione adiabatica $A \rightarrow B$ diviene

$$0 - L_{AB} = \Delta U_{AB} \quad \Longrightarrow \quad L_{AB} = -(U_B - U_A). \quad (7)$$

Poiché l'energia interna di un gas perfetto di n moli dipende solo dalla temperatura e dai suoi gradi di libertà l ($l = 5$ per un gas biatomico)

$$U = \left(\frac{l}{2}\right)nRT,$$

la (7) si particolarizza in

$$L_{AB} = -\left(\frac{5}{2}nRT_B - \frac{5}{2}nRT_A\right) = -\frac{5}{2}nR(T_B - T_A) = 2243,8 \text{ J}, \quad (8)$$

dove, per T_B , si è utilizzato il risultato (4). Notiamo che $L_{AB} > 0$ in quanto il gas subisce una espansione.

Il lavoro L_{BC} nella isobara $B \rightarrow C$ è invece calcolabile tramite $L_{BC} = p_B(V_C - V_B)$, espressione che sappiamo essere interpretabile geometricamente come l'area del rettangolo sottostante all'isobara stessa. Pertanto per le (3) e (5) abbiamo

$$L_{BC} = 897,5 \text{ J}. \quad (9)$$

Il lavoro L_{CD} è nullo in quanto $C \rightarrow D$ è una isocora e il pistone rimane fermo mentre L_{DA} , per lo stesso motivo di L_{BC} si ottiene dalla

$$L_{DA} = p_D(V_A - V_D) = p_A(V_A - V_C) = -9739,3 \text{ J} \quad (10)$$

dove va sottolineato che $p_D = p_A$ e $V_D = V_C$ mentre i rispettivi valori numerici sono dati dalle (1) e (5). Come aspettato, $L_{DA} < 0$.

c) Il calore scambiato nelle diverse trasformazioni si ottiene applicando in ciascun tratto il primo principio. Pertanto:

In $A \rightarrow B$ è ovviamente $Q_{AB} = 0$ in quanto adiabatica, in $B \rightarrow C$ il primo principio di scrive come

$$Q_{BC} - L_{BC} = U_C - U_B$$

da cui

$$Q_{BC} = L_{BC} + \frac{5}{2}nR(T_C - T_B) = 3141,3 \text{ J} \quad (11)$$

dove si sono riutilizzate l'espressione dell'energia interna di un gas perfetto e la (4). Quest'ultima relazione fornisce ancora il calore assorbito in $C \rightarrow D$ in quanto il primo principio diviene

$$Q_{CD} - 0 = U_D - U_C \quad \implies \quad Q_{CD} = \frac{5}{2}nR(T_D - T_C) = 24348,3 \text{ J} \quad (12)$$

con T_D data da (6). Infine e analogamente a (11),

$$Q_{DA} - L_{DA} = U_A - U_D \quad \implies \quad Q_{DA} = L_{DA} + \frac{5}{2}nR(T_A - T_D),$$

e per le (6) e (10) otteniamo il valore

$$Q_{DA} = -34087,6 \text{ J}.$$

Riassumiamo nella tabella seguente i risultati, con segno, circa gli scambi energetici nelle varie fasi del ciclo.

	Q (J)	L (J)	ΔU (J)
$A \rightarrow B$	0	+2243,8	-2243,8
$B \rightarrow C$	+3141,3	+897,5	+2243,8
$C \rightarrow D$	+24348,3	0	+24348,3
$D \rightarrow A$	-34087,6	-9739,3	-24348,3

d) Osserviamo innanzitutto come la variazione complessiva dell'energia interna sia nulla mentre il lavoro nell'intero ciclo, somma algebrica di tutti gli scambi tra sistema ed ambiente, è pari a

$$L = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA} = -6598,02 \text{ J.}$$

Poiché $L < 0$ viene quindi fatto un lavoro sul sistema e tale energia appare dissipata sotto forma di calore in pari quantità in quanto

$$Q = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA} = -6598,02 \text{ J.}$$

In particolare il calore fluisce dall'ambiente al sistema nelle trasformazioni $B \rightarrow C$ e $C \rightarrow D$ mentre viene dissipato nell'isobara $D \rightarrow A$ (fig. 2).

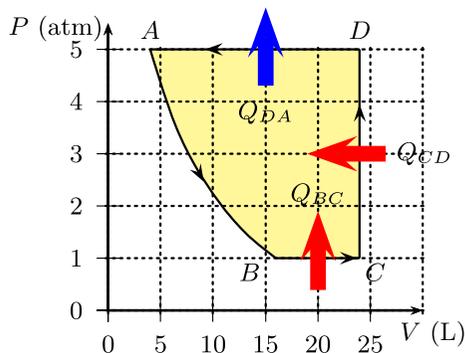
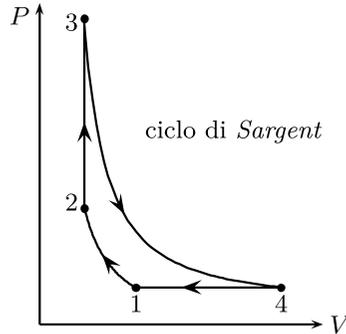


Fig. 2. Il ciclo del gas e flussi di calore.

Problema 2.9

Il **diagramma** PV sottostante rappresenta il cosiddetto ciclo di Sargent di un gas perfetto. Le trasformazioni $1 \rightarrow 2$ e $3 \rightarrow 4$ sono delle adiabatiche reversibili mentre $2 \rightarrow 3$ è una isocora e $4 \rightarrow 1$ una isobara. Se T_i denota la temperatura nel punto i -esimo e si suppongono noti i calori specifici molari c_P e c_V , determinare il rendimento di tale ciclo.



Soluzione. Poiché nelle due adiabatiche il sistema non scambia calore con l'ambiente, lo scambio termico avviene solo nelle trasformazioni $2 \rightarrow 3$ e $4 \rightarrow 1$. Siano quindi Q_{23} e Q_{41} le quantità di calore che fluiscono nel sistema o dal sistema. In particolare dovrà essere $Q_{23} > 0$ in quanto per il primo principio applicato all'isocora risulta

$$Q_{23} - 0 = U_3 - U_2 \quad (1)$$

e poiché per un gas perfetto di n moli e l gradi di libertà, l'energia interna è proporzionale alla temperatura come

$$U = \frac{l}{2}nRT, \quad (2)$$

la (1) con $T_3 > T_2$ assume la forma

$$Q_{23} = \frac{\ln RT_3}{2} - \frac{\ln RT_2}{2} = \frac{\ln R(T_3 - T_2)}{2} = c_V n(T_3 - T_2) > 0 \quad (3)$$

dove

$$c_V = \frac{l \cdot R}{2} \quad (4)$$

è il calore molare a volume costante. Di conseguenza il sistema termodinamico dovrà cedere calore nella isobara $4 \rightarrow 1$ in quanto $1 \rightarrow 2$ e $3 \rightarrow 4$ sono delle adiabatiche: ci aspettiamo quindi che sia $Q_{41} < 0$ (fig. 1).

Per determinare Q_{41} riappliciamo il primo principio in $4 \rightarrow 1$

$$Q_{41} - L_{41} = U_1 - U_4$$

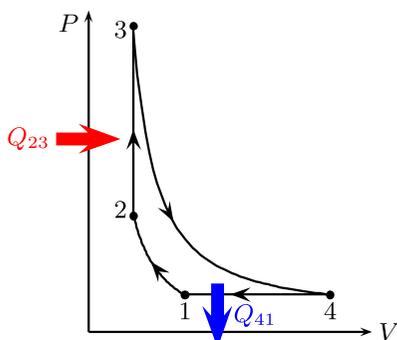


Fig. 1. Ciclo di Sargent e flussi di calore.

da cui, tenendo presente la (2),

$$Q_{41} - L_{41} = \frac{\ln R(T_1 - T_4)}{2} \quad (5)$$

e nella quale rimane da determinare L_{41} . Poiché in una isobara di gas perfetto con $P_4 = P_1$ il lavoro si esprime come

$$L_{41} = P_4(V_1 - V_4), \quad (6)$$

mentre l'equazione di stato assicura la validità delle relazioni

$$P_1 V_1 = nRT_1, \quad P_4 V_4 = nRT_4,$$

allora, sottraendo membro a membro queste ultime, discende che

$$P_4(V_1 - V_4) = nR(T_1 - T_4)$$

che ci permette di riscrivere la (6) come

$$L_{41} = nR(T_1 - T_4).$$

Il calore assorbito (5) è allora

$$Q_{41} = L_{41} + \frac{\ln R(T_1 - T_4)}{2} \implies Q_{41} = nR(T_1 - T_4) + \frac{\ln R(T_1 - T_4)}{2}$$

da cui

$$Q_{41} = \left(1 + \frac{\ln R}{2}\right) nR(T_1 - T_4) = c_P n(T_1 - T_4) \quad (7)$$

dove, osservato che $Q_{41} < 0$, si è introdotto il calore molare a pressione costante

$$c_P = R \left(1 + \frac{\ln R}{2}\right).$$

Ripresa la definizione (4) quest'ultima grandezza si scrive anche come $c_P = R + c_V$ e costituisce la nota relazione di Mayer che correla i due calori molari. D'altra parte in un ciclo, il primo principio stabilisce che

$$Q_{23} + Q_{41} - L = 0$$

da cui, esplicitando il segno negativo di Q_{41} , il lavoro ottenuto è

$$L = Q_{23} - |Q_{41}| \quad (8)$$

e il rendimento è perciò rappresentato dalla

$$\eta = \frac{L}{Q_{23}} = \frac{Q_{23} - |Q_{41}|}{Q_{23}} = 1 - \frac{|Q_{41}|}{Q_{23}}. \quad (9)$$

In base a (3) e (7), la precedente si può infine riscrivere come

$$\eta = 1 - \frac{|c_P n (T_1 - T_4)|}{c_V n (T_3 - T_2)} = 1 - \left(\frac{c_P}{c_V} \right) \cdot \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}.$$

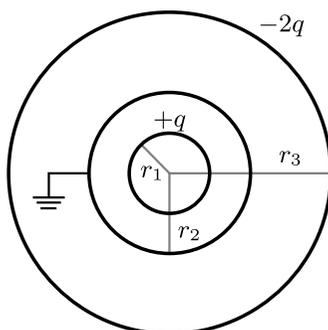
Nota 1: nello sviluppo della soluzione del problema si è inteso contemporaneamente dimostrare le relazioni (3) e (7) al fine di riprendere le definizioni dei rispettivi calori molari. Supposte comunque note tali espressioni e quindi i calori scambiati da un gas perfetto in una isocora e in una isobara, si può giungere brevemente al risultato applicando tali conoscenze direttamente nella (9).

Nota 2: Il rapporto c_P/c_V in termini dei gradi di libertà l si può esprimere come

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V} = R \left(1 + \frac{l}{2} \right) : \left(\frac{lR}{2} \right) = \frac{2+l}{l}.$$

Problema 3.6

Tre sottili sfere metalliche concentriche hanno rispettivamente raggi r_1 , r_2 , r_3 con $r_1 < r_2$ e $r_3 = 2r_2$ (figura). Posta una carica $+q$ su quella più interna e una carica $-2q$ su quella esterna, determinare la carica presente sulla superficie esterna della seconda sfera nel caso che questa venga posta a terra.



Soluzione. Le tre sfere sono conduttrici, in presenza di cariche, sono soggette all'induzione elettrostatica. Se quindi la sfera più interna presenta sulla sua superficie esterna la carica $+q$, la seconda sfera nella superficie interna dovrà presentare per induzione completa una carica $-q$ in quanto questa sfera avvolge completamente la prima sfera. Se ora ipotizziamo che sulla superficie esterna della seconda sfera ci sia una carica Q , ancora per induzione completa vi sarà una carica $-Q$ sulla superficie interna della terza sfera. Infine, poiché la carica sulla terza sfera deve conservarsi, sulla superficie esterna di quest'ultima vi sarà la carica $Q - 2q$. La situazione delle cariche sulle superfici è quindi quella rappresentata nella fig. 1.

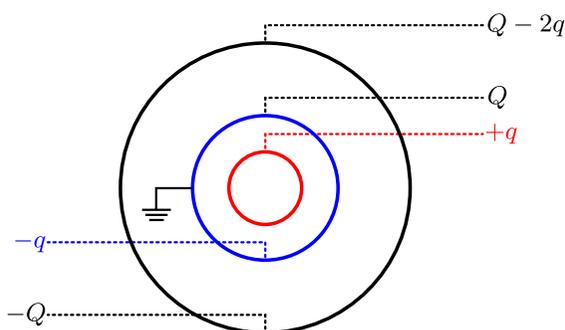


Fig. 1. Sfere e cariche sulle superfici.

Supponiamo ora che la seconda sfera non sia ancora collegata a terra e determiniamo il suo potenziale V_2 esprimendolo, per il principio di sovrapposizione, come somma dei potenziali generati dalle cariche presenti sulle diverse superfici.

Sappiamo inoltre che il potenziale dei punti interni ad una sfera è uguale a quello della sua superficie. Tenendo conto di ciò procediamo dall'interno verso l'esterno:

il contributo al potenziale della seconda sfera da parte di quella più interna è rappresentato dal potenziale

$$V_1 = \frac{k_0(+q)}{r_2} = \frac{k_0q}{r_2}, \quad (1)$$

e ciò in quanto la sua carica si può pensare tutta concentrata nel centro comune di tutte le sfere e quindi a distanza r_2 dalla seconda sfera. Le cariche sulla superficie interna della seconda sfera aggiungono il termine

$$V_{2int} = \frac{k_0(-q)}{r_2} = -\frac{k_0q}{r_2} \quad (2)$$

mentre quelle presenti sulla parte esterna contribuiscono con

$$V_{2ext} = \frac{k_0Q}{r_2}. \quad (3)$$

Passando alla sfera più grande,

$$V_{3int} = \frac{k_0(-Q)}{r_3} = -\frac{k_0Q}{r_3}, \quad V_{3ext} = \frac{k_0(Q-2q)}{r_3}, \quad (4)$$

sono i contributi al potenziale delle cariche sulla superficie interna e, rispettivamente, esterna.

V_2 è quindi dato dalla somma di tutti i precedenti contributi

$$\begin{aligned} V_2 &= V_1 + V_{2int} + V_{2ext} + V_{3int} + V_{3ext} \\ &= \frac{k_0q}{r_2} - \frac{k_0q}{r_2} + \frac{k_0Q}{r_2} - \frac{k_0Q}{r_3} + \frac{k_0(Q-2q)}{r_3}. \end{aligned} \quad (5)$$

D'altra parte, il collegamento a terra della seconda sfera porta il suo potenziale V_2 ad annullarsi per cui, imponendo la condizione $V_2 = 0$, dalla (5) discende

$$\frac{k_0q}{r_2} - \frac{k_0q}{r_2} + \frac{k_0Q}{r_2} - \frac{k_0Q}{r_3} + \frac{k_0(Q-2q)}{r_3} = 0,$$

equazione che ci permette di determinare la carica incognita Q . Eliminati i termini opposti e il fattore comune k_0 , questa si riduce alle equazioni

$$\frac{Q}{r_2} - \frac{Q}{r_3} + \frac{Q-2q}{r_3} = 0 \quad \implies \quad \frac{Q}{r_2} - \frac{Q}{r_3} + \frac{Q}{r_3} - \frac{2q}{r_3} = 0$$

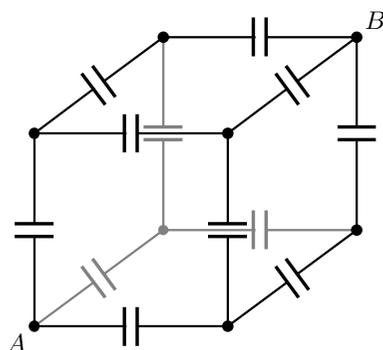
e quindi otteniamo

$$\frac{Q}{r_2} - \frac{2q}{r_3} = 0 \quad \implies \quad Q = \frac{2qr_2}{r_3}. \quad (6)$$

Imposta la relazione $r_3 = 2r_2$ tra i raggi della seconda e terza sfera otteniamo il risultato, specifico per questa geometria, ossia $Q = q$.

Problema 3.21

Dodici condensatori ciascuno di capacità C sono connessi a forma di cubo come mostrato in figura. Determinare la capacità equivalente rilevata tra A e B , estremi opposti di una diagonale del cubo.



Soluzione. Numerati i vertici del cubo come in figura 1, siano $V_A, V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6$ e V_B i potenziali dei rispettivi vertici con $V_A > V_B$.

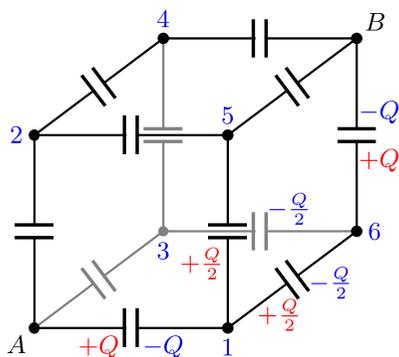


Fig. 1. Vertici e loro indici.

Osserviamo innanzitutto come i tre spigoli uscenti dal vertice A siano indistinguibili uno dall'altro per cui se Q è la carica presente su ciascuno dei tre condensatori, la carica totale del conduttore A (o anche, la carica "vista" dal vertice A) è pari a $3Q$. Per lo stesso motivo la carica distribuita sulle armature dei tre condensatori disposti sugli spigoli uscenti da B (e a loro volta costituenti un unico conduttore) sarà pari a $-3Q$ (fig. 1).

L'intero cubo può quindi considerarsi equivalente ad un condensatore di capacità incognita C_{eq} avente sulle armature la carica $3Q$ per cui la legge sulla capacità giustifica la relazione

$$V_A - V_B = \frac{3Q}{C_{eq}}. \quad (1)$$

D'altra parte, per la medesima legge, la d.d.p. tra i vertici A e 1 è

$$V_A - V_1 = \frac{Q}{C} \quad (2)$$

e, analogamente,

$$V_6 - V_B = \frac{Q}{C}. \quad (3)$$

è la d.d.p. tra i vertici 6 e B (fig. 1).

Poiché il conduttore associato al vertice 1 (ma ciò vale pure per i vertici 2, 4, 6) dev'essere complessivamente neutro essendo isolato ma presenta nell'armatura del condensatore dello spigolo di vertici $A-1$ una carica $-Q$ (fig. 1), per induzione elettrostatica $Q/2$ dovrà essere la carica presente sulle armature dei restanti due condensatori del medesimo conduttore. Riapplicando ancora la legge della capacità al condensatore dello spigolo di vertici 1-6 dev'essere

$$V_1 - V_6 = \frac{Q/2}{C}. \quad (4)$$

Possiamo infine riscrivere la d.d.p. $V_A - V_B$ come

$$V_A - V_B = (V_A - V_1) + (V_1 - V_6) + (V_6 - V_B)$$

per cui, inserite le relazioni discusse finora (1), (2), (3), e (4) discende

$$\frac{3Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C} + \frac{Q/2}{C} + \frac{Q}{C}$$

da cui, eliminando la carica Q ,

$$\frac{3}{C_{eq}} = \frac{2}{C} + \frac{1}{2C} \implies \frac{3}{C_{eq}} = \frac{5}{2C}$$

e, in definitiva

$$C_{eq} = \frac{6}{5}C.$$

Soluzione alternativa. Al medesimo risultato si può pervenire discutendo dei potenziali degli 8 vertici del cubo in modo da riconoscere in esso collegamenti in serie

e parallelo. Se quindi $+Q$ è la carica presente sui tre condensatori associati al vertice A , la legge della capacità scritta per ognuno

$$V_A - V_1 = \frac{Q}{C}, \quad V_A - V_2 = \frac{Q}{C}, \quad V_A - V_3 = \frac{Q}{C},$$

implica che sia

$$V_1 = V_2 = V_3 \tag{5}$$

cosicché questi tre condensatori si possono pensare in parallelo avendo ai capi la medesima d.d.p.. Nella fig. 2 aggiungiamo quindi degli ulteriori collegamenti conduttori così da tener conto visivamente di queste uguaglianze.

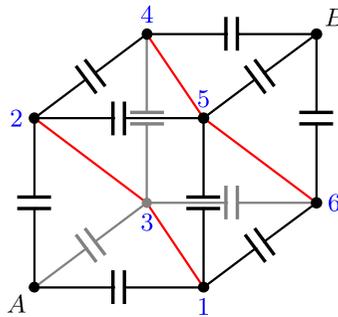


Fig. 2. Vertici equipotenziali e loro collegamenti.

Per lo stesso motivo si possono considerare in parallelo i tre condensatori aventi in comune il vertice B per cui è pure

$$V_4 = V_5 = V_6. \tag{6}$$

Le d.d.p. dei rimanenti 6 condensatori sono rispettivamente

$$V_1 - V_5, \quad V_1 - V_6, \quad V_2 - V_4, \quad V_2 - V_5, \quad V_3 - V_4, \quad V_3 - V_6$$

ma per le condizioni precedenti (5) (6) sono tutte uguali cosicché possiamo considerare questi 6 condensatori tutti in parallelo. Il cubo è quindi equivalente al circuito di figura 2a.

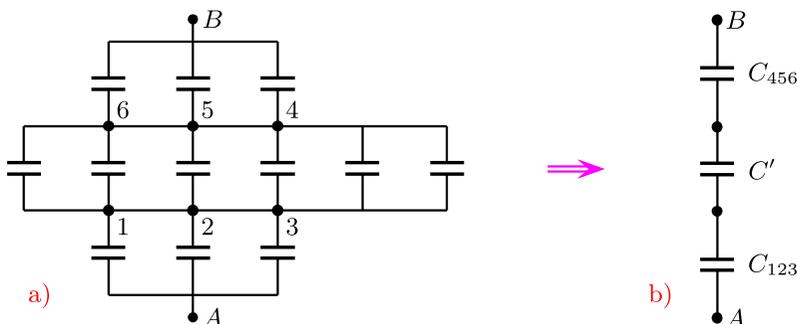


Fig. 3. Circuito equivalente.

Quest'ultimo si può ulteriormente ridurre ad una serie di tre condensatori (fig. 2b) ciascuno ottenuto dal parallelo, rispettivamente di 3, 6 e 3 condensatori di capacità C . Pertanto, con le notazioni di fig. 2b, abbiamo

$$C_{123} = C + C + C = 3C, \quad C' = 6C, \quad C_{456} = 3C$$

e la capacità equivalente complessiva C_{eq} risulta data dalla

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_{123}} + \frac{1}{C'} + \frac{1}{C_{456}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{3C} + \frac{1}{6C} + \frac{1}{3C}$$

da cui, come aspettato

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{2}{3C} + \frac{1}{6C} = \frac{5}{6C} \quad \Rightarrow \quad C_{eq} = \frac{6}{5}C.$$

Appendice

In questa appendice riportiamo l'elenco delle principali nozioni necessarie o utili per comprendere adeguatamente quanto esposto nei vari capitoli di questa raccolta.

Capitolo 1: Meccanica

- Cinematica
- Leggi della dinamica
- Forze peso, elastica e d'attrito
- Teorema dell'energia cinetica
- Conservazione dell'energia
- Potenza
- Sistemi isolati e conservazione della quantità di moto
- Moti relativi tra sistemi inerziali
- Sistemi non inerziali
- Forze apparenti: centrifuga e di traslazione
- Dinamica del corpo rigido
- Momento d'inerzia
- Moto di puro rotolamento

Capitolo 2: Termodinamica

- Leggi dei gas perfetti
- Adiabatiche di gas perfetti
- Calorimetria
- Calori molari
- Primo principio
- Secondo principio
- Rendimento di macchine termiche
- Rendimento di una macchina di Carnot
- Macchine frigorifere
- Energia interna dei gas perfetti
- Principali trasformazioni termodinamiche
- Entropia

Capitolo 3: Elettrostatica

- Forza tra cariche puntiformi
- Campo elettrico di cariche puntiformi
- Principio di sovrapposizione
- Energia potenziale elettrostatica
- Potenziale elettrico
- Induzione elettrostatica
- Energia di un sistema di cariche
- Densità di carica
- Flusso di un campo vettoriale
- Teorema di Gauss
- Capacità elettrica
- Energia in un condensatore
- Collegamenti tra condensatori
- Conservazione della carica elettrica