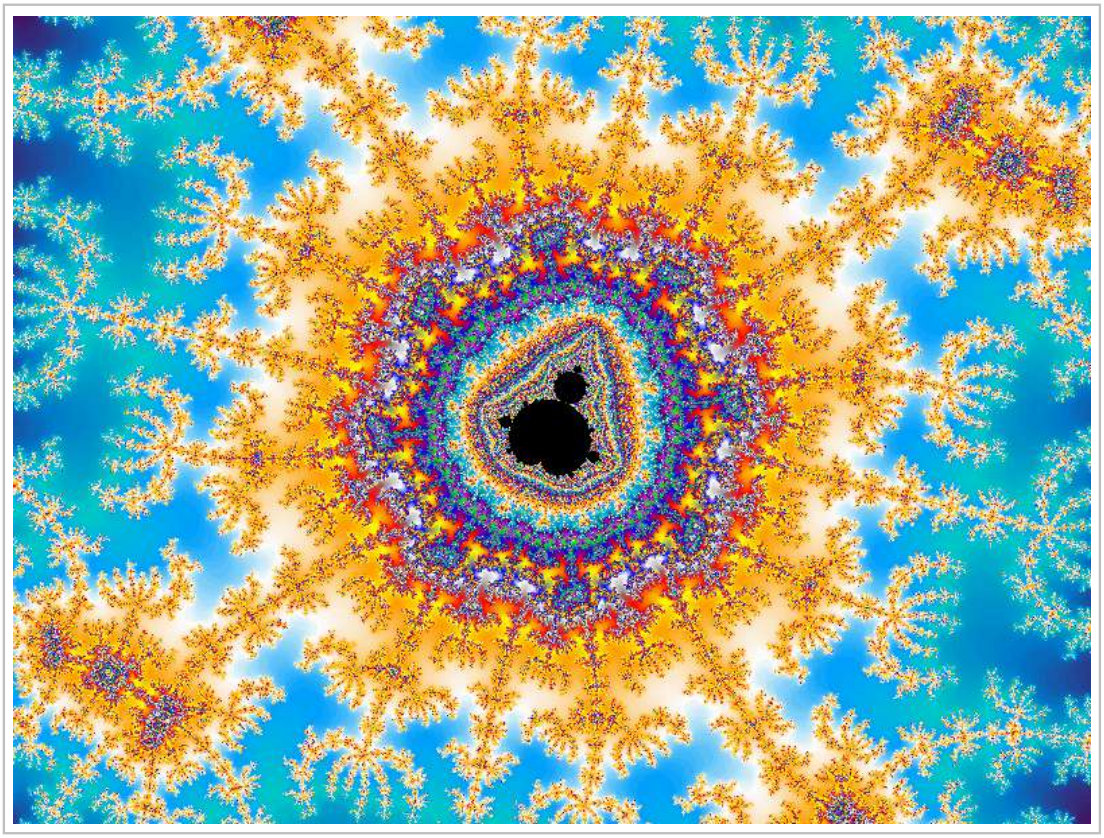
Problemi d'esame 3
2023



LORENZO ROI

Edizioni H–ALPHA

© Edizioni H–ALPHA. Novembre 2023.

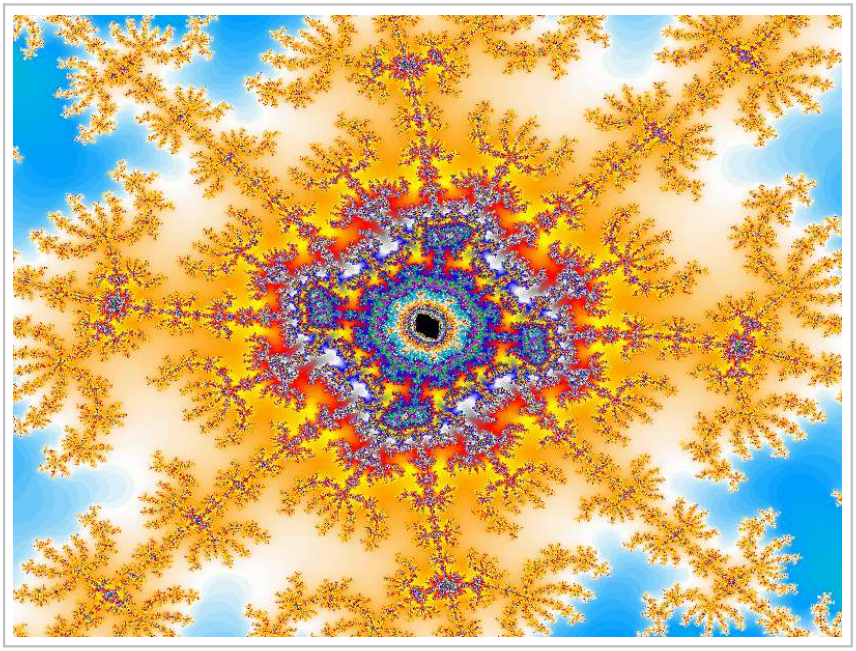
L'immagine frattale di copertina rappresenta un particolare dell'insieme di B. Mandelbrot centrato nel punto $(-0.6635548378, 0.4531033448)$ e ingrandito $3{,}1 \times 10^7$ volte.

Titolo: `Simmetria centrale frattale.`

INTRODUZIONE

Testi e soluzioni dei problemi e quesiti assegnati negli anni 2019 e 2023 nella sessione ordinaria degli esami di Stato di liceo scientifico per gli indirizzi di ordinamento (LI02) e opzione scienze applicate (LI03).
In appendice si riporta il solo testo delle prove suppletive e straordinarie.
Questo documento è il seguito di una precedente raccolta (ProblemiEsame2.pdf) di temi proposti agli esami di Stato negli anni 2015-2018.

Lorenzo Roi



Insieme di Julia della copertina

INDICE

Esame 2019 1

problema 1 1
problema 2 2
quesito 1 3
quesito 2 3
quesito 3 3
quesito 4 4
quesito 5 4
quesito 6 4
quesito 7 4
quesito 8 5

Esame 2023 38

problema 1 38
problema 2 39
quesito 1 39
quesito 2 39
quesito 3 39
quesito 4 40
quesito 5 40
quesito 6 40
quesito 7 40
quesito 8 40

APPENDICE 64

Esame 2019 suppletiva 65
Esame 2019 straordinaria 69
Esame 2023 suppletiva 72
Esame 2023 straordinaria 75

pagina lasciata intenzionalmente vuota

ESAME 2019

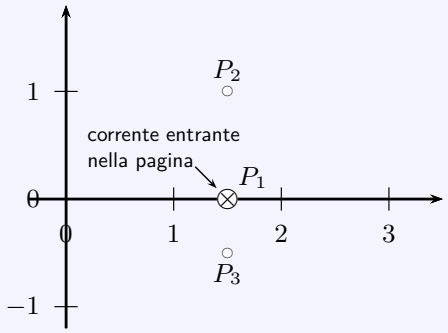
Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti.

- **Problema n. 1**

Si considerino le seguenti funzioni:

$$f(x) = ax^2 - x + b \qquad g(x) = (ax + b)e^{2x - x^2}.$$

- Provare che, comunque siano scelti i valori di a e b in $\mathbb{R}$ con $a \neq 0$, la funzione g ammette un massimo e un minimo assoluti. Determinare i valori di a e b in corrispondenza dei quali i grafici delle due funzioni f e g si intersecano nel punto $A(2, 1)$.
- Si assuma, d'ora in avanti, di avere $a = 1$ e $b = -1$. Studiare le due funzioni così ottenute, verificando che il grafico di g ammette un centro di simmetria e che i grafici di f e g sono tangenti nel punto $B(0, -1)$. Determinare inoltre l'area della regione piana S delimitata dai grafici delle funzioni f e g.
- Si supponga che nel riferimento Oxy le lunghezze siano espresse in metri (m). Si considerino tre fili conduttori rettilinei disposti perpendicolarmente al piano Oxy e passanti per i punti:



$$P_1\left(\frac{3}{2}, 0\right), \quad P_2\left(\frac{3}{2}, 1\right) \quad \text{e} \quad P_3\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

I tre fili sono percorsi da correnti continue di intensità $i_1 = 2{,}0\,\text{A}$, i_2 e i_3. Il verso di i_1 è indicato in figura mentre gli altri due versi non sono indicati.
Stabilire come varia la circuitazione del campo magnetico generato dalle correnti i_1, i_2 e i_3, lungo il contorno di S, a seconda dell'intensità e del verso di i_2 e i_3.

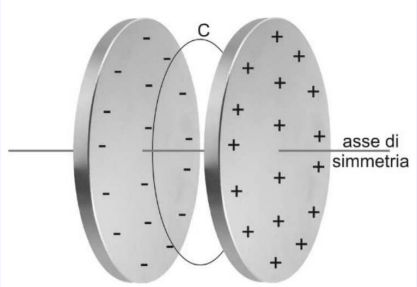
(continua)

- Si supponga, in assenza dei tre fili, che il contorno della regione S rappresenti il profilo di una spira conduttrice di resistenza $R = 0{,}20\,\Omega$. La spira è posta all'interno di un campo magnetico uniforme di intensità $B = 1{,}5 \times 10^{-2}$ T perpendicolare alla regione S. Facendo ruotare la spira intorno all'asse x con velocità angolare ω costante, in essa si genera una corrente indotta la cui intensità massima è pari a $5{,}0$ mA. Determinare il valore di ω.

Soluzione

• Problema n. 2

Un condensatore piano è formato da due armature circolari di raggio R, poste a distanza d, dove R e d sono espresse in metri (m). Viene applicata alle armature una differenza di potenziale variabile nel tempo e inizialmente nulla.



All'interno del condensatore si rileva la presenza di un campo magnetico $\vec{B}$. Trascurando gli effetti di bordo, a distanza r dall'asse di simmetria del condensatore, l'intensità di $\vec{B}$, espressa in testa (T), varia secondo la legge:

$$|\vec{B}| = \frac{kt}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}}\, r \qquad \text{con} \quad r \leq R$$

dove a e k sono costanti positive e t è il tempo trascorso dall'istante iniziale, espresso in secondi (s).

- Dopo aver determinato le unità di misura di a e k, spiegare perché nel condensatore è presente un campo magnetico anche in assenza di magneti e correnti di conduzione. Qual è la relazione tra le direzioni di $\vec{B}$ e del campo elettrico $\vec{E}$ nei punti interni al condensatore?
- Si consideri, tra le armature, un piano perpendicolare all'asse di simmetria. Su tale piano, sia C la circonferenza avente centro sull'asse e raggio r. Determinare la circuitazione di $\vec{B}$ lungo C e da essa ricavare che il flusso di $\vec{E}$, attraverso la superficie circolare delimitata da C, è dato da

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{2k\pi r^2}{\mu_0 \epsilon_0}\left(\frac{-1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + \frac{1}{a}\right).$$

Calcolare la d.d.p. tra le armature del condensatore.
A quale valore tende $|\vec{B}|$ al trascorrere del tempo? Giustificare la risposta dal punto di vista fisico.

- Per $a > 0$, si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(t) = -\dfrac{t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}$. Verificare che la funzione $F(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} - \dfrac{1}{a}$ è la primitiva di f il cui grafico passa per l'origine. Studiare la funzione F, individuandone eventuali simmetrie, asintoti, estremi. Provare che F presenta due flessi nei punti di ascisse $t = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}a$ e determinare le pendenze delle rette tangenti al grafico di F in tali punti.
- Con le opportune motivazioni, dedurre il grafico di f da quello di F, specificando cosa rappresentano le ascisse dei punti di flesso di F per la funzione f. Calcolare l'area della regione compresa tra il grafico di f, l'asse delle ascisse e le rette parallele all'asse delle ordinate passanti per gli estremi della funzione. Fissato $b > 0$, calcolare il valore di $\int_{-b}^{b} f(t)\mathrm{d}t$.

Soluzione

Questionario

1. Una data funzione è esprimibile nella forma $f(x) = \frac{p(x)}{x^2+d}$, dove $d \in \mathbb{R}$ e $p(x)$ è un polinomio. Il grafico di f interseca l'asse x nei punti di ascisse 0 e $12/5$ ed ha come asintoti le rette di equazione $x = 3$, $x = -3$ e $y = 5$. Determinare i punti di massimo e di minimo relativi della funzione f.

   Soluzione

2. È assegnata la funzione

$$g(x) = \sum_{n=1}^{1010} x^{2n-1} = x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots + x^{2017} + x^{2019}.$$

   Provare che esiste un solo $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $g(x_0) = 0$. Determinare inoltre il valore di

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{1{,}1^x}.$$

   Soluzione

3. Tra tutti i parallelepipedi rettangoli a base quadrata, con superficie totale di area S, determinare quello per cui la somma delle lunghezze degli spigoli è minima.

   Soluzione

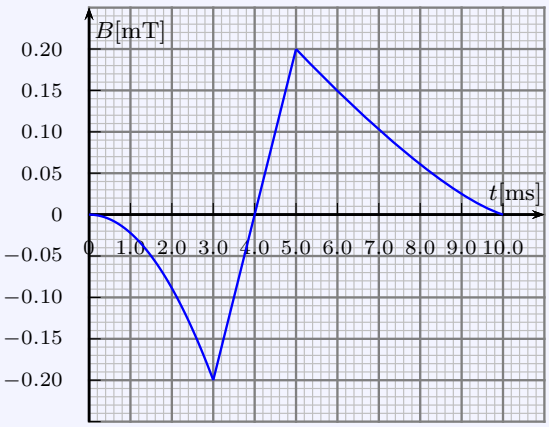
4. Dati i punti $A(2,0,-1)$ e $B(-2,2,1)$, provare che il luogo geometrico dei punti P dello spazio, tali che $\overline{PA} = \sqrt{2}\,\overline{PB}$, è costituito da una superficie sferica S e scrivere la sua equazione cartesiana. Verificare che il punto $T(-10,8,7)$ appartiene a S e determinare l'equazione del piano tangente in T a S.

Soluzione

5. Si lanciano 4 dadi con facce numerate da 1 a 6.
   - Qual è la probabilità che la somma dei 4 numeri usciti non superi 5?
   - Quale è la probabilità che il prodotto dei 4 numeri usciti sia multiplo di 3?
   - Qual è la probabilità che il massimo numero uscito sia 4?

Soluzione

6. Una spira di rame, di resistenza $R = 4{,}0\,\text{m}\Omega$, racchiude un'area di 30 cm^2 ed è immersa in un campo magnetico uniforme, le cui linee di forza sono perpendicolari alla superficie della spira. La componente del campo magnetico perpendicolare alla spira varia nel tempo come indicato in figura. Spiegare la relazione esistente tra la variazione del campo che induce la corrente e il verso della corrente indotta. Calcolare la corrente media che passa nella spira durante i seguenti intervalli di tempo:



   a) da 0,0 ms a 3,0 ms;
   b) da 3,0 ms a 5,0 ms;
   c) da 5,0 ms a 10,0 ms.

Soluzione

7. In laboratorio si sta osservando il moto di una particella che si muove nel verso positivo dell'asse x di un sistema di riferimento ad esso solidale. All'istante iniziale, la particella si trova nell'origine e in un intervallo di tempo di 2,0 ns percorre una distanza di 25 cm. Una navicella passa con velocità $v = 0{,}80\,c$ lungo la direzione x del laboratorio, nel verso positivo, e da essa si osserva il moto della stessa particella. Determinare le velocità medie della particella nei due sistemi di riferimento. Quale intervallo di tempo e quale distanza misurerebbe un osservatore posto sulla navicella?

Soluzione

8. Un protone penetra in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico uniforme di modulo $|\vec{B}| = 1{,}00$ mT. Esso inizia a muoversi descrivendo una traiettoria ad elica cilindrica, con passo costante $\Delta x = 38{,}1\,\text{cm}$, ottenuta dalla composizione di un moto circolare uniforme di raggio $r = 10{,}5\,\text{cm}$ e di un moto rettilineo uniforme. Determinare il modulo del vettore velocità e l'angolo che esso forma con $\vec{B}$.

Soluzione

COSTANTI FISICHE		
carica elementare	e	$1{,}602 \times 10^{-19}\,\text{C}$
massa del protone	m_p	$1{,}673 \times 10^{-27}\,\text{kg}$
velocità della luce	c	$2{,}998 \times 10^{8}\,\text{m/s}$

Problema n. 1: soluzione. (testo del problema)

Per dimostrare l'esistenza di due estremi della funzione

$$g(x) = (ax + b)e^{2x-x^2} \tag{1}$$

definita nel dominio $\mathbb{R}$ dal prodotto di due funzioni continue e derivabili, calcoliamo innanzitutto la sua derivata prima $g'(x)$

$$\begin{aligned} g'(x) &= a \cdot e^{2x-x^2} + (ax+b)(2-2x)e^{2x-x^2} \\ &= e^{2x-x^2}\left(a + 2ax - 2ax^2 + 2b - 2bx\right) \\ &= e^{2x-x^2}\cdot\left[(a+2b) + 2x(a-b) - 2ax^2\right] \end{aligned} \tag{2}$$

e ne studiamo il segno $g'(x) \geq 0$. Poiché $e^{2x-x^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ il segno dipende dalle soluzioni della disequazione

$$-2ax^2 + 2x(a-b) + (a+2b) \geq 0 \tag{3}$$

coinvolgente il secondo fattore di (2). L'equazione associata a tale disequazione presenta le soluzioni

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-(a-b) \pm \sqrt{(a-b)^2 + 2a(a+2b)}}{-2a} \\ &= \frac{(a-b) \pm \sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + 2a^2 + 4ab}}{2a} \\ &= \frac{(a-b) \pm \sqrt{2a^2 + (a+b)^2}}{2a} \end{aligned} \tag{4}$$

e poiché $\Delta/4 = 2a^2 + (a+b)^2 > 0$ con $a \neq 0$, il segno di $g'(x)$ dipende dal solo parametro a, coefficiente del termine quadratico in (3). Posto

$$x_1 = \frac{(a-b) + \sqrt{\Delta/4}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{(a-b) - \sqrt{\Delta/4}}{2a}, \tag{5}$$

le soluzioni sono

$$a < 0, \quad \Longrightarrow \quad x \leq x_1 \quad \veebar \quad x \geq x_2$$

oppure

$$a > 0, \quad \Longrightarrow \quad x_2 \leq x \leq x_1$$

rispettivamente riassunte graficamente nelle figg. 1 e 2.

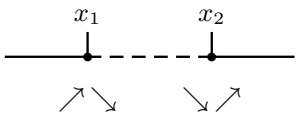


Fig. 1. Segno di $g'(x)$ con $a < 0$.

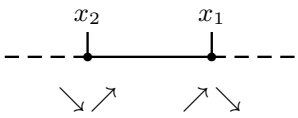


Fig. 2. Segno di $g'(x)$ con $a > 0$.

In entrambi i casi la funzione g presenta un massimo e un minimo relativi. Per dimostrare che questi estremi sono pure di massimo e minimo assoluti, ribadita la continuità di g nel dominio $\mathbb{R}$ in quanto prodotto di funzioni continue, studiamo il limite di $g(x)$ agli estremi $\pm\infty$ del dominio, limite che riscriviamo come

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax+b}{e^{x^2-2x}}. \tag{6}$$

Poiché valgono i limiti

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty} (ax+b) &= \lim_{x\to\pm\infty} x\left(a + \frac{b}{x}\right) = \infty, \\ \lim_{x\to\pm\infty} e^{x^2-2x} &= \lim_{t\to+\infty} e^t = +\infty \end{aligned} \tag{7}$$

in quanto

$$\lim_{x\to\pm\infty} (x^2 - 2x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^2\left(1 - \frac{2}{x}\right) = +\infty,$$

la (6) costituisce un caso di indeterminazione della forma ∞/∞. Per risolverla analizziamo l'esistenza del limite del rapporto delle derivate del numeratore e denominatore di (6) cioè

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{D(ax+b)}{D\left[e^{x^2-2x}\right]} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a}{(2x-2)e^{x^2-2x}}. \tag{8}$$

Poiché per il primo fattore al denominatore risulta

$$\lim_{x\to\pm\infty}(2x-2)=\pm\infty$$

e per il fattore esponenziale vale ancora il risultato (7) e $a\neq 0$, il limite della precedente è

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a}{(2x-2)e^{x^2-2x}}=0 \tag{9}$$

cosicché, per l'esistenza del limite (8), possiamo applicare il teorema di De L'Hôpital e concludere che pure

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax+b}{e^{x^2-2x}}=0. \tag{10}$$

Questo risultato assicura l'esistenza di un asintoto orizzontale coincidente con l'asse x per cui, ripresi gli andamenti circa la crescenza/decrescenza della g (figg. 1 e 2), possiamo concludere che i valori x_1 e x_2 sono rispettivamente punti di massimo e di minimo assoluto. A conferma di ciò, osservato come il segno di g sia dipendente solo dal fattore lineare, ci aspettiamo che sia $g(x_1)>0$ e $g(x_2)<0$ indipendentemente dal valore di a. Difatti

$$g(x_1)>0 \quad\Longrightarrow\quad ax_1+b>0$$

da cui, per (5),

$$a\cdot\frac{(a-b)+\sqrt{\Delta/4}}{2a}+b>0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{(a+b)+\sqrt{\Delta/4}}{2}>0 \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{\Delta/4}>-(a+b).$$

Quest'ultima è certamente soddisfatta se $a+b>0$ mentre se $a+b<0$ è possibile elevare al quadrato ed, esplicitato $\Delta/4$, ottenere

$$2a^2+(a+b)^2>(a+b)^2 \quad\Longrightarrow\quad 2a^2>0$$

pure soddisfatta. Allo stesso modo si dimostra che $g(x_2)<0$.
– Affinché i grafici di f e g si intersechino nel punto $A(2,1)$ devono valere le condizioni

$$\begin{cases} f(2)=1\\ g(2)=1\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}4a-2+b=1\\(2a+b)e^0=1\end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases}4a-3+1-2a=0\\b=1-2a\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}a=1\\b=-1.\end{cases}$$

▪ Posto $a=1$ e $b=-1$, la prima funzione da studiare è

$$f(x)=x^2-x-1, \tag{11}$$

equazione che rappresenta una parabola con la concavità rivolta nel verso positivo delle ordinate, di vertice

$$V\left(\frac{1}{2},-\frac{5}{4}\right),$$

e che interseca l'asse x nei punti di ascissa

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{a,b} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

e l'asse y in $B(0, -1)$.
Lo studio di

$$g(x) = (x-1)e^{2x-x^2} \tag{12}$$

inizia richiamando quanto già svolto precedentemente ossia come tale funzione possieda l'asintoto di equazione $y = 0$ in quanto

$$\lim_{x \to \pm\infty} (x-1)e^{2x-x^2} = 0$$

e come sia $g(x) \geq 0$ se $x \geq 1$. Inoltre, ripresa la derivata prima e calcolati in base a (5) i valori di x_1 e x_2, abbiamo

$$g'(x) \geq 0 \quad \text{nell'insieme} \quad x \leq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \ \veebar \ x \geq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2},$$

segno che riassumiamo graficamente nella fig. 3

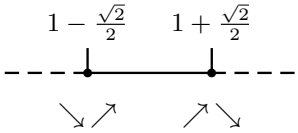


Fig. 3. Segno di $g'(x)$ con $a = 1$ e $b = -1$.

Il calcolo della derivata seconda $g''(x)$ dà

$$\begin{aligned} g''(x) &= e^{2x-x^2}(-4x+4) + e^{2x-x^2}(2-2x)(-2x^2+4x-1) \\ &= e^{2x-x^2}\left[-4(x-1) - 2(x-1)(-2x^2+4x-1)\right] \\ &= 2e^{2x-x^2}(x-1)(2x^2-4x-1) \end{aligned}$$

per cui $g''(x) \geq 0$ comporta lo studio di

$$x - 1 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geq 1$$

$$2x^2 - 4x - 1 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{3,4} = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$$

per cui, quest'ultima, è soddisfatta da

$$x \leq x_3 \ \veebar \ x \geq x_4 \quad \text{cioè} \quad x \leq 1 - \frac{\sqrt{6}}{2} \ \veebar \ x \geq 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Combinando i due termini nel grafico di fig. 4 deduciamo che $g''(x) \geq 0$ negli insiemi $1 - \frac{\sqrt{6}}{2} \leq x \leq 1$ oppure $x \geq 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$ dove g avrà la concavità rivolta verso l'alto.

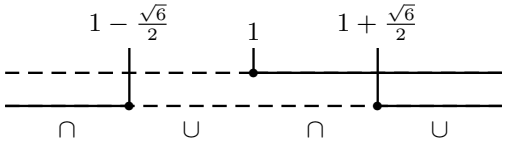


Fig. 4. Segno di $g''(x)$ con $a = 1$ e $b = -1$.

Osservato come varia il segno di $g(x)$ e delle sue prime due derivate, verifichiamo per la funzione g l'esistenza di una simmetria centrale rispetto al punto di ascissa 1 e ordinata $g(1) = 0$ ossia $C(1, 0)$. Pertanto, per confermare quanto richiesto dal testo, ottenute le equazioni della simmetria $\sigma(1, 0)$ con centro C

$$\sigma(1,0): \begin{cases} \dfrac{x+x'}{2} = 1 \\ \dfrac{y+y'}{2} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = -y \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2 - x' \\ y = -y' \end{cases} \tag{13}$$

e riscritta la g nella forma

$$y = (x-1)e^{2x-x^2} \tag{14}$$

sostituiamo l'ultima coppia di equazioni cosicché la precedente diviene

$$\begin{aligned} -y' &= (2 - x' - 1) \cdot e^{2(2-x')-(2-x')^2} && \cdot(-1) \\ y' &= (x' - 1) \cdot e^{[4-2x'-4-(x')^2+4x']} \\ y' &= (x' - 1)e^{2x'-(x')^2} : \end{aligned}$$

l'invarianza dell'equazione così ottenuta rispetto alla (14) dimostra l'esistenza della simmetria centrale di centro C.
Per verificare la mutua tangenza tra f e g ci assicuriamo innanzitutto che $B(0, -1)$ appartenga pure al grafico di g: difatti $g(0) = -1 \cdot e^0 = -1$.
Il calcolo delle rispettive derivate fornisce inoltre

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - 1 \quad \implies \quad f'(0) = -1 \\ g'(x) &= e^{2x-x^2}(-2x^2 + 4x - 1) \quad \implies \quad g'(0) = e^0(0 + 0 - 1) = -1 \end{aligned}$$

per cui essendo

$$\begin{cases} f(0) = g(0) \\ f'(0) = g'(0) \end{cases}$$

i rispettivi grafici sono, come richiesto, tangenti in $B(0, -1)$.
Il calcolo delle ordinate degli estremi e dei punti di flesso fornisce*

$$\begin{aligned} x_1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \quad &\implies \quad g(x_1) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \exp\left(2 - \sqrt{2} - \frac{3}{2} + \sqrt{2}\right) = -\frac{\sqrt{2e}}{2} \\ x_2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad &\implies \quad g(x_2) = \frac{\sqrt{2}}{2} \exp\left(2 + \sqrt{2} - \frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{2e}}{2} \end{aligned}$$

mentre per i punti di flesso, in aggiunta a $C(1, 0)$, abbiamo

$$g\left(1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \pm\frac{\sqrt{6}}{2} \exp\left(2 \pm \sqrt{6} - \frac{5}{2} \mp \sqrt{6}\right) = \pm\frac{\sqrt{6}}{2} e^{-1/2}.$$

* $\exp(\ldots)$ è una scrittura alternativa a $e^{(\ldots)}$ e talvolta più opportuna tipograficamente.

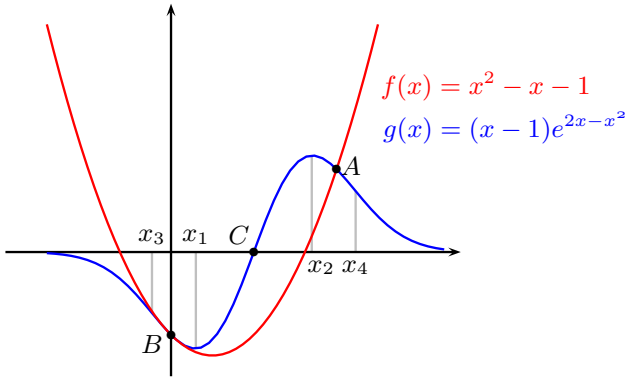


Fig. 5. Grafici delle funzioni f e g.

La figura 5 riporta i grafici di entrambe le funzioni.
La regione S di cui si chiede il calcolo dell'area è evidenziata nella figura 6 e il suo valore discende dalla soluzione dell'integrale

$$\mathcal{A}(S) = \int_0^2 [g(x) - f(x)]\mathrm{d}x$$

che esplicitamente è

$$\mathcal{A}(S) = \int_0^2 \Big[(x-1)e^{2x-x^2} - x^2 + x + 1\Big]\mathrm{d}x. \tag{15}$$

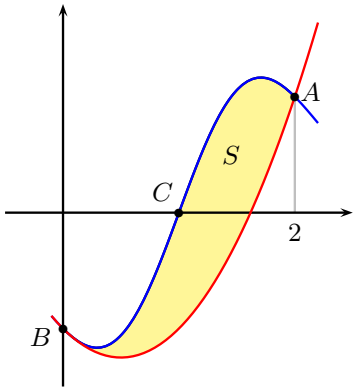


Fig. 6. Regione S compresa tra i grafici di f e g.

Sfruttando la proprietà di addittività il calcolo procede immediato per i termini elementari

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(S) &= \int_0^2 (x-1)e^{2x-x^2}\mathrm{d}x + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_0^2 \\
&= \int_0^2 (x-1)e^{2x-x^2}\mathrm{d}x + \left(-\frac{8}{3} + 2 + 2\right) \\
&= \frac{4}{3} - \int_0^2 (x-1)e^{2x-x^2}\mathrm{d}x,
\end{aligned} \tag{16}$$

mentre rimane il calcolo che coinvolge la funzione g. D'altra parte, come dimostrato precedentemente, la funzione integranda possiede quale centro di simmetria il punto $C(1,0)$ che è pure il punto medio del segmento di estremi B e A per cui il suo integrale definito dev'essere nullo come evidenziato graficamente dalla figura 7).

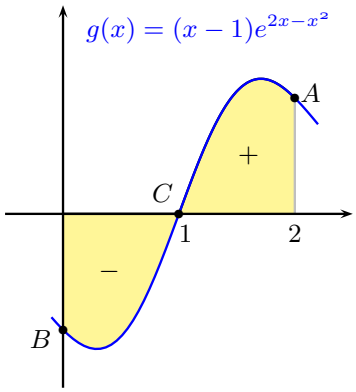


Fig. 7. Trapezoidi coinvolti in $\int_0^2 g(x)\mathrm{d}x = 0$.

Procedendo in termini più formali, tale integrale si può suddividere nella somma

$$\int_0^2 (x-1)e^{2x-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 (x-1)e^{2x-x^2}\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-1)e^{2x-x^2}\mathrm{d}x \tag{17}$$

e riscriviamo il secondo addendo in una forma alternativa tramite il cambio di variabile rappresentato dalla (13) $x' = -x+2$. Difatti, calcolato il differenziale della nuova variabile

$$\mathrm{d}x' = -\mathrm{d}x \quad \text{e aggiornati gli estremi} \quad x'_{inf} = -1+2 = 1, \quad x'_{sup} = -2+2 = 0,$$

l'integrale (17) si modifica come

$$\begin{aligned}\int_0^2 (x-1)e^{2x-x^2}\mathrm{d}x &= \int_0^1 (x-1)e^{2x-x^2}\mathrm{d}x + \int_1^0 (2-x'-1)e^{2(2-x')-(2-x')^2}(-\mathrm{d}x') \\ &= \int_0^1 (x-1)e^{2x-x^2}\mathrm{d}x - \int_1^0 (1-x')e^{2x'-(x')^2}\mathrm{d}x'\end{aligned}$$

e quindi, sfruttando la proprietà dell'inversione degli estremi, ottenere quanto aspettato

$$\begin{aligned}\int_0^2 (x-1)e^{2x-x^2}\mathrm{d}x &= \int_0^1 (x-1)e^{2x-x^2}\mathrm{d}x + \int_1^0 (x'-1)e^{2x'-(x')^2}\mathrm{d}x' \\ &= \int_0^1 (x-1)e^{2x-x^2}\mathrm{d}x - \int_0^1 (x'-1)e^{2x'-(x')^2}\mathrm{d}x' = 0.\end{aligned}$$

In definitiva, ripresa la (16), l'area della regione S è

$$\mathcal{A}(S) = \left(\frac{4}{3} - 0\right)\mathrm{m}^2 = \frac{4}{3}\,\mathrm{m}^2 \approx 1{,}3333\,\mathrm{m}^2. \tag{18}$$

Nota 1. Per il calcolo di $\int_0^2 g(x)\mathrm{d}x$ nella (16) si può procedere pure in modo esplicito osservando che la derivata dell'esponente è $D(2x-x^2) = 2(1-x)$. Ciò suggerisce di introdurre la nuova variabile di integrazione $t = 2x - x^2$ il cui differenziale è

$$\mathrm{d}t = 2(1-x)\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad (x-1)\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{2}$$

cosicché

$$\begin{aligned}\int (x-1)e^{2x-x^2}\mathrm{d}x &= \int e^t \cdot \left(-\frac{\mathrm{d}t}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\int e^t \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}e^t + c = -\frac{1}{2}e^{2x-x^2} + c\end{aligned}$$

per cui

$$\int_0^2 (x-1)e^{2x-x^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}e^{2x-x^2}\right]_0^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

Nota 2. Con la medesima sostituzione gli estremi di integrazione sono entrambi nulli per cui, a maggior ragione, è $\int_0^2 g(x)\mathrm{d}x = 0$.

▪ Per comprendere come varia la circuitazione del campo magnetico dobbiamo innanzitutto individuare quali correnti sono concatenate o meno al contorno della regione S posizionando adeguatamente i punti P_1, P_2 e P_3 e siccome questi hanno ascissa pari a $3/2$ converrà calcolare le corrispondenti ordinate sui grafici di g ed f. Poiché

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}-1\right)\exp\left(2\cdot\frac{3}{2} - \frac{9}{4}\right) = \frac{1}{2}e^{3/4} \approx 1{,}05$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 = -\frac{1}{4}$$

allora P_1 e P_2 appartengono alla regione S in quanto le rispettive ordinate soddisfano la disuguaglianza

$$-\frac{1}{4} < y_{P1}, y_{P2} < 1{,}05,$$

mentre $P_3 \notin S$ perché $y_{P3} = -1/2 < -1/4$ (fig. 8).

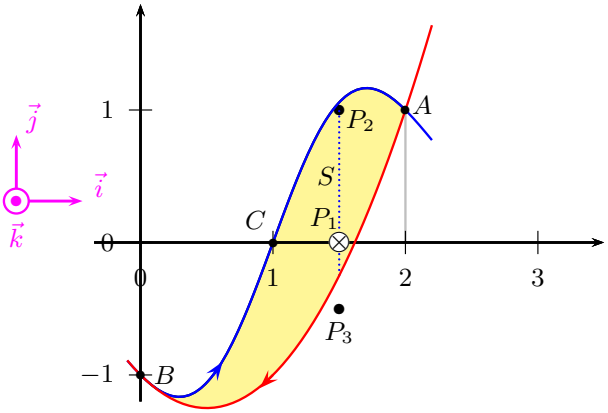


Fig. 8. Correnti comprese entro il contorno di S e terna di riferimento.

La corrente i_3 di conseguenza non è concatenata con il percorso quindi non influisce sulla circuitazione del campo magnetico. Introdotta la terna destrorsa costituita dai versori $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ ($\vec{k}$ è uscente dal foglio) e detto γ il contorno di S che supponiamo di percorrere nel verso orario (fig. 8) cosicché $i_1 = 2\,\mathrm{A} > 0$, per il teorema di Ampère sulla circuitazione Γ avremo

$$\Gamma(\gamma) = \mu_0(i_1 + i_2) = \mu_0(2\,\mathrm{A} + i_2). \tag{19}$$

Pertanto:

- supposto $\Gamma(\gamma) > 0$ per cui $2\,\mathrm{A} + i_2 > 0$ e quindi $i_2 > -2\,\mathrm{A}$, le possibilità che si presentano sono

  $$\begin{aligned} &\text{se} \quad -2\,\mathrm{A} < i_2 < 0 \quad \Longrightarrow \quad i_2 \text{ avrà verso concorde con il versore } \vec{k}, \\ &\text{se} \quad i_2 > 0 \quad \Longrightarrow \quad i_2 \text{ entrante e concorde con } -\vec{k} \text{ (come } i_1), \\ &\text{se} \quad i_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Gamma(\gamma) = \mu_0(2\,\mathrm{A}). \end{aligned}$$

- se invece $\Gamma(\gamma) \leq 0$ per cui $2\,\mathrm{A} + i_2 \leq 0$ e quindi $i_2 \leq -2\,\mathrm{A}$, i_2 non potrà che essere sempre negativa e quindi con verso concorde con $\vec{k}$ cioè uscente dal piano di S.

▪ La rotazione della regione S nel campo magnetico $\vec{B} = B\vec{k}$ con $B = 1{,}5 \times 10^{-2}\,\mathrm{T}$ genera una variazione di flusso magnetico $\Phi(\vec{B})$ e induce una tensione nel contorno conduttore che, dotato di resistenza $R = 0{,}20\,\Omega$, viene percorso da una corrente il cui valore massimo è $i_{max} = 5 \times 10^{-3}\,\mathrm{A}$.
Per ottenere il valore della velocità angolare ω, definiamo innanzitutto due grandezze:

- il vettore $\vec{S}$ di modulo uguale all'area (18) $\mathcal{A}(S) = \mathcal{A} = 4/3\,\mathrm{m}^2$, perpendicolare al piano (variabile nel tempo) della regione S,
- l'angolo α tra i vettori $\vec{B}$ e $\vec{S}$.

Nell'ipotesi, fornita dal testo, che la velocità angolare ω con cui ruota la spira sia costante, la dipendenza dal tempo t dell'angolo α dev'essere rappresentata da una relazione lineare per cui poniamo $\alpha = \omega t + \alpha_0$ con α_0 fase iniziale.
Il flusso del campo magnetico attraverso S è dato dal prodotto scalare

$$\Phi(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{S},$$

e, nell'ipotesi del testo, questa grandezza assume la forma esplicita

$$\Phi(\vec{B}) = B\mathcal{A}\cos\alpha = B\mathcal{A}\cos(\omega t + \alpha_0). \tag{20}$$

Tale variazione di flusso genera nella spira una tensione indotta V (o forza elettromotrice) che, per la legge dell'induzione elettromagnetica (o legge di Faraday-Neumann), è descritta dalla

$$V(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi(\vec{B})}{\mathrm{d}t} = -B\mathcal{A}\,\omega\big[-\operatorname{sen}(\omega t + \alpha_0)\big] = B\mathcal{A}\,\omega\operatorname{sen}(\omega t + \alpha_0) \tag{21}$$

e di conseguenza il bordo conduttore di S viene percorso da una corrente elettrica $i(t)$ che invece segue la legge di Ohm

$$V(t) = Ri(t) \quad \Longrightarrow \quad i(t) = \frac{V(t)}{R} = \frac{B\mathcal{A}\,\omega}{R}\operatorname{sen}(\omega t + \alpha_0). \tag{22}$$

Osservato come la corrente dipenda dal tempo con legge armonica, l'intensità massima è quindi rappresentata dall'ampiezza di (22)

$$i_{max} = \frac{B\mathcal{A}\omega}{R}$$

dalla quale, esplicitata l'incognita della velocità angolare, otteniamo il risultato

$$\omega = \frac{Ri_{max}}{B\mathcal{A}} = \frac{(0{,}20\,\Omega)(5\times10^{-3}\,\mathrm{A})}{(1{,}5\times10^{-2}\,\mathrm{T})(1{,}33\,\mathrm{m}^2)} = 5{,}0125\times10^{-2}\,\mathrm{rad/s} \approx 0{,}05\,\mathrm{rad/s}.$$

Problema n. 2: soluzione. (testo del problema)

- Il testo propone la funzione

$$|B(t)| = \frac{kt}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}\cdot r \tag{1}$$

per descrivere l'andamento dell'intensità del campo magnetico al variare della distanza r dall'asse di simmetria del condensatore e, soprattutto, dal tempo t. Dato che quest'ultimo viene misurato in secondi (s) per cui il suo quadrato, t^2, è in s^2, segue che la grandezza a^2 dev'essere omogenea a t^2 per cui pure la sua unità di misura dev'essere il s^2 e quindi l'unità di a è il secondo.
Per determinare l'unità di misura della costante k, riscriviamo la (1) sostituendo alle grandezze coinvolte le rispettive unità di misura sapendo che il testa (T) è relativa al campo magnetico e il metro (m) è l'unità di r. Abbiamo quindi

$$\mathrm{T} = \frac{k\cdot\mathrm{s}}{\sqrt{(\mathrm{s}^2)^3}}\cdot\mathrm{m}$$

che, semplificata, diviene

$$\mathrm{T} = \frac{k\cdot\mathrm{s}}{\sqrt{\mathrm{s}^6}}\cdot\mathrm{m} = \frac{k\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{s}^3}\cdot\mathrm{m} \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{T} = \frac{k\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

per cui, esplicitata la costante k risulta

$$k = \frac{\mathrm{T}\cdot\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}}. \tag{2}$$

In aggiunta, se consideriamo che su un tratto rettilineo di lunghezza l, percorso dalla corrente i ed immerso in un campo magnetico B agisce la forza $F = ilB$ per cui il campo B è pure dato da $B = F/il$, il tesla si può esprimere come

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}}.$$

Inoltre, per la II legge della dinamica, il newton (N) in termini di unità fondamentali è

$$\mathrm{N} = \frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

per cui, inserendo tali relazioni nella (2), riportiamo le unità di k alle unità fondamentali del Sistema Internazionale ossia

$$k = \frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}} \cdot \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}} = \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{s}^2}{\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^2}$$
$$= \frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^2} \cdot \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}}.$$

La legge di Ampère-Maxwell nel caso di assenza di correnti concatenate si scrive come

$$\Gamma(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\mathrm{d}\Phi(\vec{E})}{\mathrm{d}t}. \tag{3}$$

Questa espressione lega la variazione nel tempo del flusso del campo elettrico $\vec{E}$, $\mathrm{d}\Phi(\vec{E})/\mathrm{d}t$, con la circuitazione $\Gamma(\vec{B})$ del campo magnetico e il fattore $i_s = \epsilon_0 \mathrm{d}\Phi(\vec{E})/\mathrm{d}t$ costituisce la cosiddetta corrente di spostamento introdotta da Maxwell per salvaguardare la continuità della corrente nei punti in cui è presente un campo elettrico variabile nel tempo.
Tra le direzioni dei campi elettrico e magnetico, vi è una relazione di perpendicolarità in tutto lo spazio compreso tra le armature del condensatore: nel caso che il flusso di $\vec{E}$ stia aumentando per cui $\mathrm{d}\Phi(\vec{E})/\mathrm{d}t > 0$, la corrente di spostamento i_s ha verso concorde con la corrente che porta le cariche sull'armatura positiva e il vettore $\vec{B}$ ha il verso di figura 1 e le sue linee di forza sono delle circonferenze concentriche aventi il centro sull'asse di simmetria e giacenti su piani perpendicolari a questo asse. Il verso di $\vec{B}$ è opposto se $\mathrm{d}\Phi(\vec{E})/\mathrm{d}t < 0$.

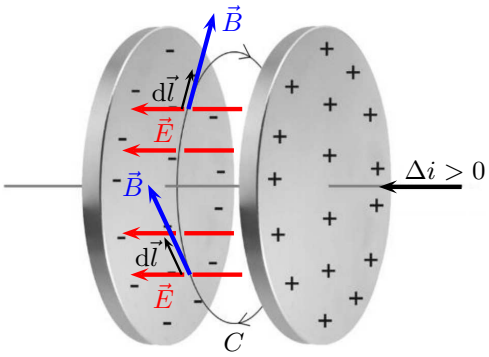


Fig. 1. Condensatore piano, corrente in aumento e campi.

▪ Richiamata la definizione di circuitazione tramite l'integrale di linea

$$\Gamma(\vec{B}) = \oint_C \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \tag{4}$$

oppure, in termini meno formali

$$\Gamma(\vec{B}) = \sum_C \vec{B} \cdot \Delta\vec{l},$$

questa grandezza coinvolge il differenziale $\vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ che rappresenta il prodotto scalare tra il campo $\vec{B}$ e l'elemento differenziale di percorso $\mathrm{d}\vec{l}$. Il suo calcolo lungo la circonferenza C di raggio r disposta tra le armature del condensatore in un piano perpendicolare all'asse e avente centro sull'asse stesso (fig. 1) si semplifica non appena si osservi come in ogni punto di C siano paralleli i vettori $\vec{B}$ e $\mathrm{d}\vec{l}$: ne segue che

$$\vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = B\,\mathrm{d}l\cos 0° = B\,\mathrm{d}l$$

per cui la (4) diviene

$$\Gamma(\vec{B}) = \oint_C B\,\mathrm{d}l. \tag{5}$$

Data inoltre la simmetria cilindrica esistente, lungo C il modulo B è costante e (5) si semplifica ulteriormente in

$$\Gamma(\vec{B}) = B\oint_C \mathrm{d}l = 2\pi r B \tag{6}$$

dove $\oint \mathrm{d}l = 2\pi r$ rappresenta nient'altro che la lunghezza di C.
Nota la circuitazione, dalla (3) possiamo isolare il differenziale del flusso

$$\Gamma(\vec{B}) = \mu_0\epsilon_0\frac{\mathrm{d}\Phi(\vec{E})}{\mathrm{d}t} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}\Phi(\vec{E}) = \frac{\Gamma(\vec{B})\mathrm{d}t}{\mu_0\epsilon_0}$$

e quindi con il risultato (6) ottenere

$$\mathrm{d}\Phi(\vec{E}) = \frac{2\pi r B\,\mathrm{d}t}{\mu_0\epsilon_0}.$$

Poiché la dipendenza dal tempo del modulo di $\vec{B}$ è nota dalla (1), ne discende anche la dipendenza da t del differenziale del flusso

$$\mathrm{d}\Phi(\vec{E}) = \frac{2\pi r}{\mu_0\epsilon_0}\cdot\frac{kt}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}\cdot r = \frac{2\pi k r^2}{\mu_0\epsilon_0}\cdot\frac{t\cdot\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}. \tag{7}$$

Se quindi risolviamo l'integrale definito nell'intervallo $[0, t]$

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{2\pi k r^2}{\mu_0\epsilon_0}\cdot\int_0^t \frac{t\cdot\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}} \tag{8}$$

potremo determinare l'espressione finita di $\Phi(\vec{E})$. Con tale obiettivo, definiamo il cambio di variabile

$$z = t^2 + a^2, \qquad \mathrm{d}z = 2\,t\,\mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{d}z,$$

e l'integrale indefinito associato al precedente si riscrive

$$\begin{aligned}\int\frac{t\cdot\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}} &= \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z^3}} = \frac{1}{2}\int z^{-3/2}\mathrm{d}z\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{z^{1-(3/2)}}{1-(3/2)} + c = -\frac{1}{\sqrt{z}} + c\\ &= -\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} + c\end{aligned}$$

per cui (8) si esplicita in

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{2\pi k r^2}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} \right]_0^t = \frac{2\pi k r^2}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2}} \right]$$
$$= \frac{2\pi k r^2}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} + \frac{1}{a} \right] \qquad (a > 0), \tag{9}$$

che costituisce il risultato richiesto.

– Per giungere alla d.d.p. V è necessario conoscere il campo elettrico $\vec{E}$ dato che, in un condensatore con armature a distanza d, tra queste grandezze sussiste la relazione $V = E\,d$. Se quindi $\vec{S}$ è il vettore perpendicolare al cerchio di bordo C, modulo $S = \pi r^2$ e verso concorde con $\vec{E}$, la definizione di flusso per il campo elettrico implica

$$\Phi(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{S} = E\,S \cos 0^\circ = E \cdot (\pi r^2) \tag{10}$$

in quanto i due vettori coinvolti sono, appunto, paralleli e concordi. Sostituendo in quest'ultima la (9)

$$E(\pi r^2) = \frac{2\pi k r^2}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} + \frac{1}{a} \right]$$

abbiamo l'espressione per il campo elettrico

$$E = \frac{2k}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} + \frac{1}{a} \right]$$

dalla quale, per $V = E\,d$ si ha subito

$$V = \frac{2kd}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} + \frac{1}{a} \right]. \tag{11}$$

– L'andamento asintotico del campo magnetico si trova calcolando il limite

$$\lim_{t\to+\infty} |B(t)| = \lim_{t\to+\infty} \frac{kr \cdot t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}. \tag{12}$$

A questo scopo riscriviamo la funzione ad argomento del limite estraendo dalla radice al denominatore il fattore t^3

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{kr \cdot t}{\sqrt{\left[t^2\left(1+\frac{a^2}{t^2}\right)\right]^3}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{kr \cdot t}{t^3\sqrt{\left(1+\frac{a^2}{t^2}\right)^3}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{kr}{t^2\sqrt{\left(1+\frac{a^2}{t^2}\right)^3}}.$$

Poiché

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{a^2}{t^2} = 0 \qquad \text{cosicché} \qquad \lim_{t\to+\infty} \sqrt{\left(1+\frac{a^2}{t^2}\right)^3} = 1$$

e

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{kr}{t^2} = 0,$$

il limite richiesto è nullo

$$\lim_{t\to+\infty} |B(t)| = 0$$

e pertanto il campo magnetico si annulla asintoticamente. La ragione di ciò sta nell'andamento, pure asintotico della la d.d.p. tra le armature. Difatti la d.d.p. espressa dalla (11) tende al valore costante

$$\lim_{t\to+\infty} V = \lim_{t\to+\infty} \frac{2kd}{\mu_0\epsilon_0}\cdot\left[-\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}}+\frac{1}{a}\right] = \frac{2kd}{\mu_0\epsilon_0 a}$$

in quanto (si veda più avanti)

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} = 0.$$

Poiché il campo è proporzionale a V tramite la $V = E\,d$ e a sua volta, il flusso lo è al campo, $\Phi(\vec{E}) = E(\pi r^2)$, ne segue che

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(\vec{E})}{\mathrm{d}t} \to 0 \qquad \text{così come, per (3)} \qquad \Gamma(\vec{B}) \to 0$$

e quindi l'annullarsi del campo magnetico.

▪ Definita la funzione

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad f(t) = -\frac{t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}, \qquad (a>0) \tag{13}$$

se

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} - \frac{1}{a} \tag{14}$$

è una primitiva (e, a parte il segno, lo conferma la (9)), allora deve soddisfare la proprietà $F'(t) = f(t)$. Difatti il calcolo della sua derivata prima fornisce

$$\begin{aligned} F'(t) &= -\frac{1}{(t^2+a^2)}\cdot\frac{2t}{2\sqrt{t^2+a^2}} \\ &= -\frac{t}{(t^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}} = f(t). \end{aligned} \tag{15}$$

Inoltre il grafico di (14) passa per l'origine in quanto è immediato notare che $F(0) = 1/a - 1/a = 0$.

– Iniziamo lo studio del grafico di F con $t\in\mathbb{R}$ determinandone innanzitutto il segno: se moltiplichiamo entrambi i membri della disequazione

$$F(t)\geq 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} - \frac{1}{a} \geq 0$$

per il denominatore comune positivo, questa è equivalente alla

$$a \geq \sqrt{t^2+a^2} \quad\Longrightarrow\quad a^2 \geq t^2 + a^2$$

dalla quale discende $t^2 \leq 0$, soddisfatta solo se $t = 0$. Pertanto $F(t) < 0$ se $t \neq 0$ oppure $F(0) = 0$.
Circa eventuali simmetrie il calcolo di $F(-t)$

$$F(-t) = \frac{1}{\sqrt{(-t)^2 + a^2}} - \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} - \frac{1}{a} = F(t), \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

dimostra la validità dell'identità $F(-t) = F(t)$ per cui F è una funzione pari con un grafico simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.
La funzione è continua nel dominio $\mathbb{R}$ in quanto composta da funzioni pure continue e con denominatore diverso dallo zero cosicché gli unici limiti sono $\lim_{t\to\pm\infty} F(t)$. Osservato che

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} = 0$$

essendo

$$\lim_{t\to\pm\infty} (t^2 + a^2) = +\infty, \quad \text{per cui se } z = t^2 + a^2 \quad \lim_{z\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{z}} = 0,$$

allora

$$\lim_{t\to\pm\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} - \frac{1}{a} \right) = -\frac{1}{a}$$

dato che il secondo addendo è una costante. La retta orizzontale $y_a = -1/a$ è quindi un asintoto per F e poiché

$$F(t) - y_a > 0 \quad \Longrightarrow \quad F(t) - \left(-\frac{1}{a} \right) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} > 0$$

è $F(t) > y_a$ e il grafico di F appartiene al semipiano superiore dei due definiti dall'asintoto.
La derivata prima $F'(t)$ è data dalla (13) e il suo segno è

$$F'(t) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad -t \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad t \leq 0$$

per cui la F possiede un massimo in $(0, 0)$ (fig. 2).

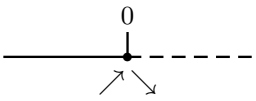


Fig. 2. Segno di $F'(t)$.

Il calcolo della $F''(t)$ dà

$$\begin{aligned} F''(t) &= -\left[\frac{(t^2 + a^2)^{3/2} - \frac{3}{2}(t^2 + a^2)^{1/2} \cdot 2t^2}{(t^2 + a^2)^3} \right] \\ &= -\frac{t^2 + a^2 - 3t^2}{(t^2 + a^2)^{5/2}} = \frac{2t^2 - a^2}{(t^2 + a^2)^{5/2}} \end{aligned}$$

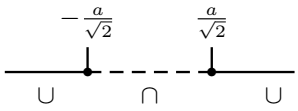


Fig. 3. Segno di $F''(t)$.

per cui

$$F''(t) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 2t^2 - a^2 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad t \leq -\frac{a}{\sqrt{2}} \ \veebar \ t \geq \frac{a}{\sqrt{2}},$$

insieme nel quale le concavità sono rivolte nel verso delle ordinate positive (fig. 3).
I punti di flesso sono invece $t_{1,2} = \pm a/\sqrt{2}$ con ordinate

$$F\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}a^2}} - \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}-3}{3a} \tag{16}$$

e le pendenze in tali punti si ottengono dal calcolo della derivata prima (15) cioè

$$F'\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pm\frac{a}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}a^2\right)^3}} = \frac{\mp\frac{a}{\sqrt{2}}}{a^3 \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}} = \mp\frac{2}{3a^2\sqrt{3}}.$$

Il grafico di $F(t)$ è rappresentato quindi nella figura 4.

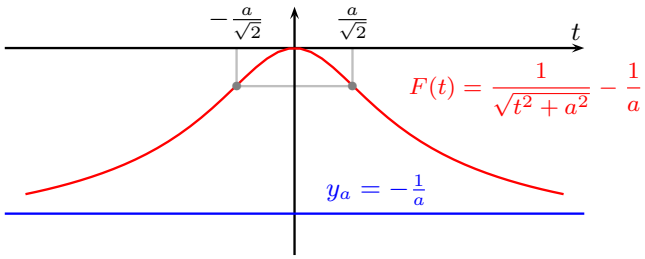


Fig. 4. Grafico della funzione $F(t)$, punti di flesso e asintoto.

- Per dedurre il grafico di $f(t)$ da quello di $F(t)$ va ricordato che
  a) $f(t)$ è la derivata prima di $F(t)$ cioè $F'(t) = f(t)$ cosicché $F''(t) = f'(t)$.
  b) Poiché $F(t)$ è pari, la sua derivata prima $F'(t)$ è dispari e, comunque, tale proprietà emerge immediatamente dalla validità dell'identità $f(-t) = -f(t)$.

Possiamo quindi circoscrivere lo studio qualitativo all'intervallo illimitato $t \in]-\infty, 0]$ e analizzare, con l'aiuto della rappresentazione grafica, l'andamento del coefficiente angolare delle rette tangenti al grafico di figura 4.
Innanzitutto vale il limite

$$\lim_{t\to-\infty} f(t) = 0$$

in quanto, per l'andamento asintotico di $F(t)$ le rette tangenti tendono a disporsi parallelamente all'asse dei valori di t (fig. 5).
Quindi, procedendo nel verso di t crescente, la pendenza di $F(t)$ rimane positiva ma va crescendo e raggiunge il valore massimo quando $t = -a/\sqrt{2}$ (fig. 6) ossia quando la $F(t)$ presenta il primo flesso: formalmente $F''(-a/\sqrt{2}) = f'(-a/\sqrt{2}) = 0$.

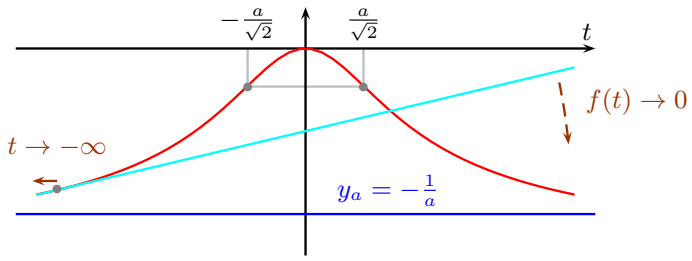


Fig. 5. Grafico della funzione $F(t)$ e retta tangente con $t \to -\infty$.

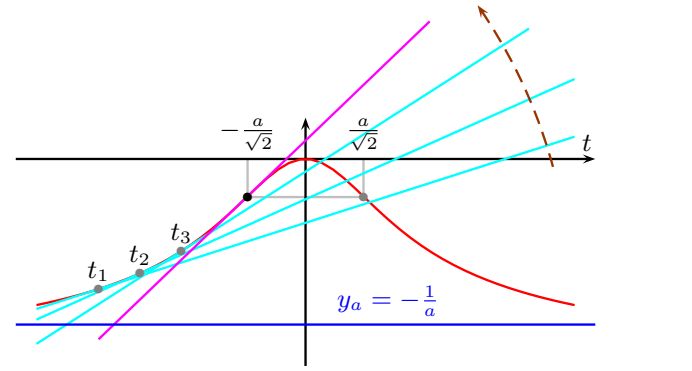


Fig. 6. Grafico della funzione $F(t)$ e tangenti con t crescente e $t < -a/\sqrt{2}$.

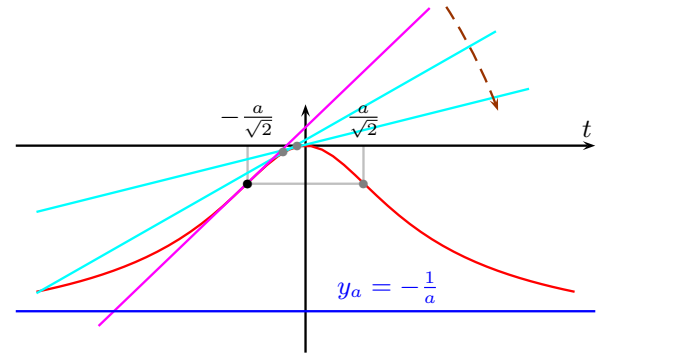


Fig. 7. Grafico della funzione $F(t)$ e tangenti con t crescente e $-a/\sqrt{2} < t \leq 0$.

Successivamente l'inclinazione, pur rimanendo positiva, tende a diminuire fino ad annullarsi in corrispondenza di $t = 0$ (fig. 7.).
Sulla base di queste osservazioni e sfruttando la simmetria dispari di $f(t)$ proponiamo nella figura 8 un suo grafico approssimativo dove riportiamo le ascisse dei suoi punti di massimo e minimo che, come detto, coincidono con i punti di flesso di $F(t)$.

– Per la simmetria dispari di $f(t)$, l'area $\mathcal{A}$ della regione evidenziata in figura 8 è data dall'integrale definito

$$\mathcal{A} = -2 \cdot \int_0^{a/\sqrt{2}} f(t)\mathrm{d}t, \tag{17}$$

dove il segno negativo si giustifica in quanto nell'intervallo $[0, a/\sqrt{2}]$ l'integrale fornirebbe

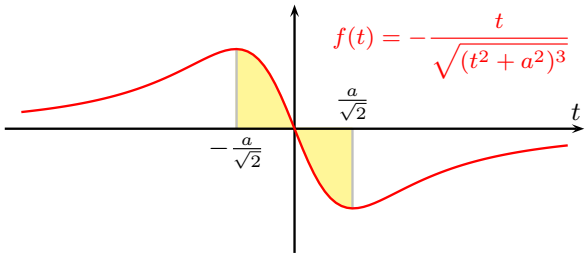


Fig. 8. Grafico della funzione $f(t)$ e punti di estremo.

un valore negativo dato che $f(t) < 0$.
Poiché $F(t)$ è una primitiva di $f(t)$ abbiamo che (17) diviene

$$\mathcal{A} = -2\big[F(t)\big]_0^{a/\sqrt{2}} = -2\left[F\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) - 0\right]$$

ma, ripreso il risultato (16), troviamo

$$\mathcal{A} = -2 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}-3}{3a}\right) = \frac{6-2\sqrt{6}}{3a}.$$

– Il calcolo dell'integrale

$$\int_{-b}^{b} f(t)\mathrm{d}t \tag{18}$$

è invece immediato e fornisce un risultato nullo in quanto, per la simmetria dispari di $f(t)$ e degli estremi di integrazione, esso esprime la somma di due trapezoidi di aree uguali ma algebricamente di segno opposto (fig. 9).

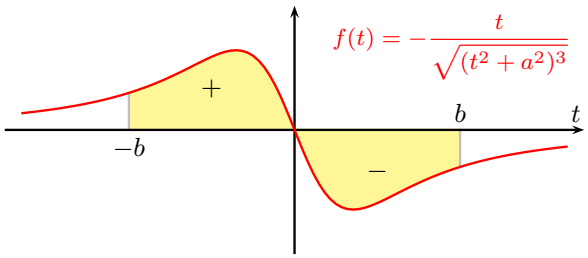


Fig. 9. Aree della funzione $f(t)$ e loro segno.

Più formalmente, l'integrale (18) si può suddividere nella somma

$$\int_{-b}^{b} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-b}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{b} f(t)\mathrm{d}t \tag{19}$$

e definito il cambio di variabile

$$t = -z, \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}t = -\mathrm{d}z, \quad \Longrightarrow \quad z_{inf} = -(-b) = b, \quad z_{sup} = 0$$

si può riscrivere il primo addendo di (19)

$$\int_{-b}^{0} f(t)\mathrm{d}t = \int_{b}^{0} f(-z)(-\mathrm{d}z) = \int_{b}^{0} [-f(z)](-\mathrm{d}z) = \int_{b}^{0} f(z)\mathrm{d}z = -\int_{0}^{b} f(z)\mathrm{d}z$$

dove si sono utilizzate la simmetria di $f(t)$ e, nell'ultimo passaggio, la proprietà dell'inversione degli estremi di integrazione. In tal modo l'integrale (19) si riduce alla somma di due valori opposti

$$\int_{-b}^{b} f(t)\mathrm{d}t = -\int_{0}^{b} f(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{b} f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Quesito n. 1: soluzione. (testo del quesito)

Assegnata la funzione f nella forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{x^2 + d}, \qquad d \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad p(x) = \text{polinomio}, \tag{1}$$

il suo grafico interseca l'asse x nei punti di ascisse $x_1 = 0$ e $x_2 = 12/5$ per cui questi valori devono essere le soluzioni dell'equazione $f(x_{1,2}) = 0$ che, essendo f data da un rapporto, si riflettono su $p(x_{1,2}) = 0$. Supponendo che il grado del polinomio $p(x)$ sia $m \in \mathbb{N}$, $p(x)$ si potrà scomporre nel prodotto

$$p(x) = (x - 0)\left(x - \frac{12}{5}\right) \cdot q(x) = x\left(x - \frac{12}{5}\right) q(x) \tag{2}$$

con $q(x)$ a sua volta polinomio di grado $n = m - 2$.
L'esistenza di due asintoti verticali di equazioni $x = \pm 3$ impone invece che il denominatore $D(x) = x^2 + d$ si annulli in corrispondenza di tali valori: pertanto

$$D(\pm 3) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\pm 3)^2 + d = 0 \quad \Longrightarrow \quad d = -9.$$

Inoltre il numeratore dovrà soddisfare la condizione $p(\pm 3) \neq 0$.
Con tali informazioni la funzione f assume la forma

$$f(x) = \frac{x\left(x - \frac{12}{5}\right) q(x)}{x^2 - 9}, \tag{3}$$

ma la presenza nel suo grafico dell'asintoto orizzontale di equazione $y = 5$ implica che il limite

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \quad \text{sia } a) \text{ finito e } b) \text{ pari a } 5.$$

La prima condizione è soddisfatta se sono uguali i gradi dei polinomi a numeratore e a denominatore e poiché il grado del denominatore è 2, allora il grado n di $q(x)$ dev'essere $n = 0$. $q(x)$ è perciò una costante e poniamo $q(x) = a$. La seconda condizione

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 5$$

permette di determinare a in quanto

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax\left(x-\frac{12}{5}\right)}{x^2-9} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2\left(1-\frac{12}{5x}\right)}{x^2\left(1-\frac{9}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{a\left(1-\frac{12}{5x}\right)}{1-\frac{9}{x^2}},$$

e poiché

$$\lim_{x\to\infty} \frac{12}{5x} = \lim_{x\to\infty} \frac{9}{x^2} = 0$$

abbiamo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a\left(1-\frac{12}{5x}\right)}{1-\frac{9}{x^2}} = a \quad \Longrightarrow \quad a = 5. \tag{4}$$

La funzione richiesta è, in definitiva,

$$f(x) = \frac{5x\left(x-\frac{12}{5}\right)}{x^2-9} = \frac{5x^2-12x}{x^2-9}, \qquad x \in \mathbb{R} - \{\pm 3\}, \tag{5}$$

e la ricerca dei suoi estremi si fonda sul calcolo della derivata prima

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(10x-12)(x^2-9)-2x(5x^2-12x)}{(x^2-9)^2} \\ &= \frac{12x^2-90x+108}{(x^2-9)^2} = \frac{6(2x^2-15x+18)}{(x^2-9)^2} \end{aligned} \tag{6}$$

e sullo studio del suo segno, $f'(x) \geq 0$. Quest'ultimo dipende solo dal termine quadratico a numeratore di (6) per cui

$$2x^2-15x+18 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{225-144}}{4} = \begin{matrix} \nearrow 6 \\ \searrow 3/2 \end{matrix}$$

e quindi $f'(x) \geq 0$ nell'insieme $]-\infty, 3/2] \cup [6, +\infty[$. Nella rappresentazione grafica del segno della derivata prima e degli intervalli in cui f è crescente/decrescente (fig. 1) appare evidente che $x_M = 3/2$ è l'ascissa di un massimo relativo proprio mentre $x_m = 6$ quella di un minimo relativo proprio.

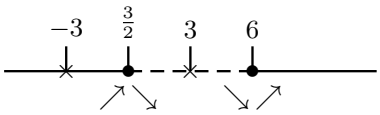


Fig. 1. Segno di $f'(x)$.

Quesito n. 2: soluzione. (testo del quesito)

La funzione polinomiale, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{1010} x^{2n-1} = x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots + x^{2017} + x^{2019}, \tag{1}$$

di grado 2019 e somma di potenze dispari della variabile x, è una funzione dispari: difatti

$$g(-x) = \sum_{n=1}^{1010}(-x)^{2n-1} = \sum_{n=1}^{1010}\left[-\left(x^{2n-1}\right)\right] = -\sum_{n=1}^{1010} x^{2n-1} = -g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Inoltre i suoi limiti agli estremi del dominio sono

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$$

in quanto g si può riscrivere come

$$\lim_{x\to+\infty} x^{2019}\left(\frac{1}{x^{2018}} + \frac{1}{x^{2016}} + \cdots + \frac{1}{x^2} + 1\right)$$

e il termine di grado massimo ha limite

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^{2019} = \pm\infty$$

mentre

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^{2018}} + \frac{1}{x^{2016}} + \cdots + \frac{1}{x^2} + 1\right) = 1.$$

Circa le proprietà di g notiamo che essa assume agli estremi dell'intervallo $[-1, 1]$ i valori

$$g(1) = \sum_{n=1}^{1010}(1)^{2n-1} = \overbrace{1+1+\cdots+1+1}^{1010 \text{ volte}} = 1010 > 0 \tag{3}$$

e quindi per simmetria

$$g(-1) = -g(1) = -1010 < 0. \tag{4}$$

Inoltre la sua derivata prima

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 + 3x^2 + 5x^4 + \cdots + 2017x^{2016} + 2019x^{2018} \\ &= \sum_{n=1}^{1010}(2n-1)\cdot x^{2n-2} = \sum_{n=1}^{1010}(2n-1)\left(x^{n-1}\right)^2 \qquad x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{5}$$

è costituita dalla somma di potenze pari di x cosicché certamente soddisfa la diseguaglianza

$$g'(x) > 0 \qquad x \in [-1, 1]. \tag{6}$$

Tali proprietà soddisfano le ipotesi del teorema degli zeri (o di B. Bolzano) per cui deve esistere un valore $x_0 \in [-1, 1]$ tale che $g(x_0) = 0$. Inoltre, data la positività di $g'(x)$ con $x \in [-1, 1]$ e quindi per la monotonia strettamente crescente in tale intervallo, tale valore è unico e non può che essere, per la simmetria, $x_0 = 0$: difatti non solo risulta

$$g(0) = \sum_{n=1}^{1010}(0)^{2n-1} = 0$$

ma pure tale valore emerge evidente nella riscrittura di g come prodotto

$$g(x) = x\big(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2016} + x^{2018}\big):$$

difatti tale prodotto si annulla solo per $x = 0$ in quanto il secondo fattore è diverso dallo zero per ogni $x \in \mathbb{R}$.

• Il limite richiesto

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{1{,}1^x} \tag{7}$$

comporta evidentemente lo studio di una indeterminazione del tipo ∞/∞ in quanto entrambe le funzioni coinvolte possiedono i limiti

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} 1{,}1^x = +\infty.$$

Analizziamo quindi l'eventuale applicabilità del teorema di De L'Hôpital determinando il limite del rapporto delle derivate

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g'(x)}{D[1{,}1^x]}. \tag{8}$$

Ripresa la (5) ed eseguendo la derivata del denominatore otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g'(x)}{D[1{,}1^x]} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sum_{n=1}^{1010}(2n-1)\big(x^{n-1}\big)^2}{1{,}1^x \cdot \ln(1{,}1)}$$

che rientra ancora nel caso ∞/∞ in quanto

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{1010}(2n-1)\big(x^{n-1}\big)^2 = +\infty.$$

Osserviamo comunque come il polinomio a numeratore abbia ora il grado massimo pari a 2018 e quindi inferiore di una unità rispetto a 2019. Ciò suggerisce di procedere comunque allo stesso modo per altre 2018 volte ottenendo alla fine, a numeratore, una costante k mentre al denominatore avremo il termine

$$1{,}1^x \cdot \big[\ln(1{,}1)\big]^{2019}.$$

Poiché il limite di questo termine è

$$\lim_{x\to+\infty} 1{,}1^x \cdot \big[\ln(1{,}1)\big]^{2019} = +\infty \quad \text{mentre} \quad \lim_{x\to+\infty} k = k,$$

esiste di conseguenza il limite dell'ultimo rapporto ed è uguale a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{k}{1{,}1^x \cdot \big[\ln(1{,}1)\big]^{2019}} = 0.$$

Diviene quindi possibile applicare a ritroso il teorema di De L'Hôpital per 2018 volte e concludere che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{1{,}1^x} = 0.$$

Quesito n. 3: soluzione. (testo del quesito)

Sia $x > 0$ la misura della lunghezza del lato del quadrato di base e $h > 0$ l'altezza del parallelepipedo (fig. 1). L'area S della superficie totale è evidentemente

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot (\text{area di base}) + 4 \cdot (\text{area faccia laterale}) = 2(x^2) + 4(hx) \\ &= 2x^2 + 4hx \end{aligned} \tag{1}$$

e poiché devono valere le limitazioni $x > 0$ e $h > 0$ per cui pure $hx > 0$, dalla (1) discende

$$4hx = S - 2x^2 > 0 \quad \Longrightarrow \quad S - 2x^2 > 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 < \frac{S}{2} \quad \Longrightarrow \quad x < \sqrt{\frac{S}{2}}. \tag{2}$$

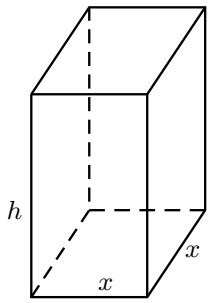


Fig. 1. Parallelepipedo rettangolo e sue dimensioni.

La somma y delle lunghezze degli spigoli è la grandezza da studiare e in termini delle dimensioni del parallelepipedo è data dalla

$$\begin{aligned} y &= 2 \cdot (\text{somma spigoli di base}) + 4 \cdot (\text{altezza}) = 2(4x) + 4h \\ &= 8x + 4h. \end{aligned} \tag{3}$$

Tale grandezza dipende da entrambe le dimensioni del parallelepipedo e per poterla studiare va riportata ad una sola variabile. A tal fine utilizziamo l'informazione sull'area complessiva esplicitando h nella (1)

$$h = \frac{S - 2x^2}{4x} : \tag{4}$$

sostituita questa espressione nella (3) riduciamo la funzione y ad una sola variabile aggiungendovi le limitazioni (2)

$$\begin{cases} y = 8x + 4\left(\dfrac{S - 2x^2}{4x}\right) = 8x + \dfrac{S}{x} - 2x = 6x + \dfrac{S}{x} \\ 0 < x < \sqrt{\dfrac{S}{2}}. \end{cases}$$

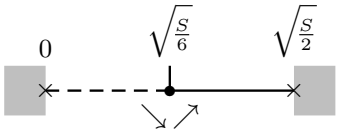


Fig. 2. Segno di y' e crescenza/decrescenza di y.

Per la ricerca del minimo di y calcoliamo la sua derivata prima e ne studiamo il segno

$$y' = 6 - \frac{S}{x^2} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 6x^2 - S \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 \geq \frac{S}{6} \quad \Longrightarrow \quad x \geq \sqrt{\frac{S}{6}}$$

rappresentandolo poi nella figura 2 assieme alle limitazioni.
La funzione y presenta quindi un minimo in corrispondenza di $x_{min} = \sqrt{S/6}$ cui corrisponde un'altezza del parallelepipedo che, dalla (4), risulta

$$\begin{aligned} h &= \frac{S}{4x_{min}} - \frac{x_{min}}{2} = \frac{\sqrt{6S}}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{6}} \\ &= \sqrt{S}\left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{12}\right) = \sqrt{\frac{S}{6}} = x_{min} \end{aligned}$$

per cui, in definitiva, il parallelepipedo che minimizza la somma delle lunghezze degli spigoli si riduce ad un cubo.

Quesito n. 4: soluzione. (testo del quesito)

Assegnati i punti nello spazio $A(2, 0, -1)$ e $B(-2, 2, 1)$ e definito il punto generico $P(x, y, z)$ le distanze $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ sono espresse dalle

$$\overline{PA} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z+1)^2} \tag{1}$$
$$\overline{PB} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2} \tag{2}$$

per cui la relazione $\overline{PA} = \sqrt{2}\,\overline{PB}$ si esplicita in

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2}.$$

Elevando al quadrato entrambi i membri

$$(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 2\left[(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2\right]$$

e sviluppando i quadrati

$$x^2 + 4 - 4x + y^2 + z^2 + 1 + 2z = 2x^2 + 8 + 8x + 2y^2 + 8 - 8y + 2z^2 + 2 - 4z$$

e riducendo i termini simili, otteniamo l'equazione in tre variabili del luogo S

$$S: x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 8y - 6z + 13 = 0. \tag{3}$$

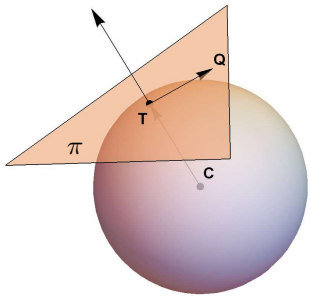


Fig. 1. Sfera, centro C e punto T di tangenza del piano π.

Tale equazione rientra nella forma canonica della sfera $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ avente come centro il punto di coordinate $C(-a/2,-b/2,-c/2)$ e raggio $r^2=(a^2+b^2+c^2)/4-d$. Nel nostro caso, l'equazione (3) rappresenta una sfera (fig. 1) di centro

$$C\left(-\frac{12}{2},\frac{8}{2},\frac{6}{2}\right)\equiv(-6,4,3)$$

e raggio

$$r^2=36+16+9-13 \quad\Longrightarrow\quad r^2=48 \quad\Longrightarrow\quad r=4\sqrt{3}.$$

• La verifica che $T(-10,8,7)\in S$ si esegue sostituendo le coordinate di T nell'equazione (3)

$$(-10)^2+8^2+7^2+12(-10)-8\cdot 8-6\cdot 7+13=0$$

e poiché l'uguaglianza è verificata,

$$100+64+49-120-64-42+13=0 \quad\Longrightarrow\quad 0=0$$

la risposta è affermativa.

• Il vettore $\overrightarrow{CT}$ che collega il centro C della sfera con il punto T (in fig. 1 è applicato al punto T) è perpendicolare al piano π tangente in T a S. Se quindi $Q(x,y,z)$ è un punto di π, il piano si può descrivere tramite il prodotto scalare

$$\pi\colon \overrightarrow{CT}\cdot\overrightarrow{TQ}=0 \tag{4}$$

che sintetizza la perpendicolarità tra $\overrightarrow{CT}$ e $\overrightarrow{TQ}$. Poiché

$$\overrightarrow{CT}=(-10+6,8-4,7-3)\equiv(-4,4,4), \qquad \overrightarrow{TQ}=(x+10,y-8,z-7)$$

il prodotto (4) si esplicita in

$$\begin{aligned}\pi\colon\ &(-4,4,4)\cdot(x+10,y-8,z-7)=0\\ &-4(x+10)+4(y-8)+4(z-7)=0 \qquad :4\\ &-x-10+y-8+z-7=0\end{aligned}$$

e quindi l'equazione rappresentativa del piano è

$$\pi\colon x-y-z+25=0.$$

Quesito n. 5: soluzione. (testo del quesito)

• La prima domanda chiede di determinare la probabilità che la somma dei 4 numeri usciti a seguito di un lancio di 4 dadi non superi 5. Se quindi indichiamo con d_1, d_2, d_3 e d_4 i numeri usciti nel lancio, va calcolata la probabilità

$$P(d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \leq 5). \tag{1}$$

Poiché gli esiti possibili per un dado sono 6 e questi si possono ripetere per ciascuno dei 4 dadi, il numero N delle possibili uscite, tutte equiprobabili, è pari a $N = 6^4$ pari al numero delle disposizioni con ripetizione di 6 oggetti a gruppi di 4.
Il numero di casi con somma $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \leq 5$ si possono elencare: difatti

- se $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 4$ allora tutti e 4 i dadi devono presentare come esito il numero 1 ossia (1,1,1,1) e questa eventualità si può presentare solo in $n_1 = 1$ modalità.
- Per avere un'uscita $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 5$ uno dei 4 dadi deve presentare il numero 2 mentre i rimanenti 3 presenteranno il numero 1. Tale situazione si può presentare in 4 modi diversi che elenchiamo come

  $$(2,1,1,1) \ \veebar \ (1,2,1,1) \ \veebar \ (1,1,2,1) \ \veebar \ (1,1,1,2)$$

  ed è equivalente al numero delle combinazioni di 4 oggetti a gruppi di uno ossia

  $$C_{4,1} = \binom{4}{1} = 4.$$

  Utilizzando la definizione classica di probabilità, il valore cercato è quindi

$$P(d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \leq 5) = \frac{n_1 + C_{4,1}}{N} = \frac{1+4}{6^4} = \frac{5}{6^4} \approx 0{,}0039.$$

• Perché sia $P(d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot d_4 = 3 \cdot n)$ con $n \in \mathbb{N}_0$ osserviamo che in un lancio di un dado solo i numeri 3 e 6 sono multipli di 3 mentre 4 non lo sono. I casi favorevoli all'evento richiesto si ottengono sottraendo dai 6^4 casi possibili i 4^4 casi che nel prodotto non presentano il 3 o il 6. Ne segue

$$P(d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot d_4 = 3 \cdot n) = \frac{6^4 - 4^4}{6^4} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{65}{81} \approx 0{,}8025.$$

Anziché procedere con il calcolo combinatorio, la probabilità richiesta si può ottenere anche sfruttando i teoremi sulla probabilità. Poiché in un dado 4 sono i numeri non multipli di 3, $(1,2,4,5)$, definito $E_1 = (1,2,4,5)$ come l'evento che vede l'uscita di uno di questi numeri nel lancio del primo dado, allora la probabilità di questo evento è $p(E_1) = 4/6$. L'evento composto

$$E = E_1 \wedge E_2 \wedge E_3 \wedge E_4$$

rappresenta invece il caso che non vi siano multipli di 3 nel lancio dei 4 dadi. Per il teorema della probabilità composta e osservato che ciascun evento E_i è indipendente dagli altri abbiamo

$$P(E) = p(E_1) \cdot p(E_2) \cdot p(E_3) \cdot p(E_4) = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \left(\frac{4}{6}\right)^4.$$

Infine, poiché siamo interessati all'evento contrario la sua probabilità è data

$$P(d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot d_4 = 3 \cdot n) = 1 - P(E) = 1 - \left(\frac{4}{6}\right)^4 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{65}{81} \approx 0{,}8025.$$

• Per il calcolo della probabilità che in un lancio compaia come numero più elevato il 4, $P(d_{max} = 4)$, dobbiamo escludere la presenza dei numeri 5 e 6 in ogni dado cosicché il numero delle disposizioni con ripetizione di 4 *"oggetti"* a gruppi di 4 è pari a 4^4. Tra questi eventi vi possono essere uscite coinvolgenti solo i numeri 1, 2, e 3 per cui il numero 4 non sarebbe presente. Volendo invece che lo sia, questi 3^4 casi vanno esclusi dal calcolo dei casi favorevoli cosicché il numero di questi ultimi è $4^4 - 3^4$. La probabilità richiesta è perciò

$$P(d_{max} = 4) = \frac{4^4 - 3^4}{6^4} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{175}{1296} \approx 0{,}1350.$$

Quesito n. 6: soluzione. (testo del quesito)

La legge di Faraday-Neumann dell'induzione elettromagnetica afferma che la tensione indotta (o forza elettromotrice) V in un circuito è legata alla variazione $\mathrm{d}\Phi(\vec{B})/\mathrm{d}t$ di flusso del campo magnetico $\vec{B}$ dalla relazione

$$V = -\frac{\mathrm{d}\Phi(\vec{B})}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

dove il segno negativo a fattore indica, a sua volta, la legge di Lenz.
Poiché la spira di rame ha una resistenza pari a $R = 4{,}0\,\mathrm{m}\Omega$, la legge di Ohm applicata ad essa dà

$$V = Ri(t) \tag{2}$$

mentre la definizione di flusso per una spira piana caratterizzata dal vettore $\vec{S}$ che supponiamo parallelo e concorde al campo $\vec{B}$ fornisce

$$\Phi(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{S} = B\,S \tag{3}$$

con $S = 30\,\mathrm{cm}^2$. Aggregando le ultime due in (1) discende

$$Ri(t) = -\frac{\mathrm{d}(BS)}{\mathrm{d}t} \quad \Longrightarrow \quad Ri(t) = -S\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

in quanto S non dipende dal tempo t e, quale costante, si può estrarre dalla derivata e porre a fattore. La corrente $i(t)$ dipende quindi dalla variazione del campo come

$$i(t) = -\frac{S}{R} \cdot \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}. \tag{4}$$

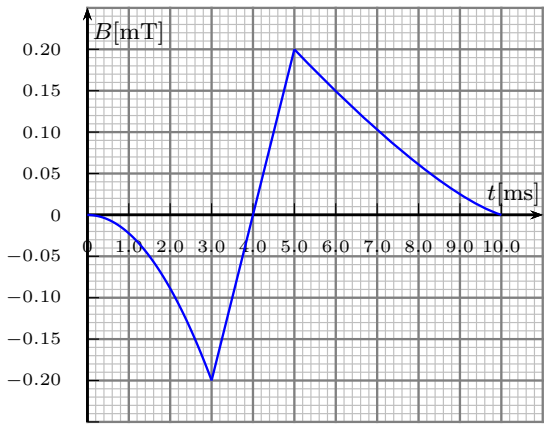


Fig. 1. Dipendenza del campo magnetico $B(t)$ dal tempo t.

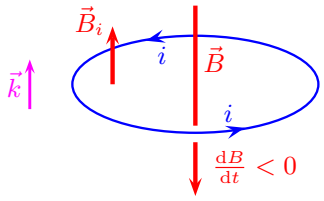


Fig. 2. Variazione di $\vec{B}$ e verso della corrente con $t \in [0, 3]$ ms.

Fissata una direzione positiva tramite il versore $\vec{k}$ (fig. 2), nel primo intervallo dove $0 \leq t \leq 3\,\text{ms}$, l'andamento grafico di $B(t)$ (fig. 1) mostra un campo inizialmente nullo che assume via via valori decrescenti negativi e quindi con derivata negativa, $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t < 0$. La corrente indotta, per la (4), ha di conseguenza segno positivo e genera un campo magnetico indotto $\vec{B}_i$ con verso opposto a $\vec{B}$ (fig. 2).

Per $3\,\text{ms} < t \leq 5\,\text{ms}$ il campo aumenta con andamento lineare crescente e, inizialmente negativo, assume in $[4, 5]$ms valori positivi (fig. 3). La sua derivata è costante e positiva

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \frac{B(5) - B(3)}{(5-3)\text{ms}} = \frac{[0{,}2 - (-0{,}2)]\text{mT}}{2\,\text{ms}}$$
$$= 0{,}2\,\text{mT/ms} = 0{,}2\,\text{T/s} > 0$$

e di conseguenza la corrente indotta (4) è negativa con intensità costante pari a

$$i(t) = -\frac{(30 \times 10^{-4}\,\text{m}^2)}{(4 \times 10^{-3}\,\Omega)} \cdot 0{,}2\,\text{T/s} = -0{,}15\,\text{A}.$$

Infine con $5\,\text{ms} < t \leq 10\,\text{ms}$ il campo decresce fino ad annullarsi per cui $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t < 0$ e la

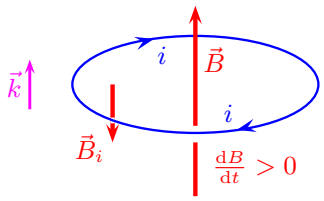


Fig. 3. Variazione di $\vec{B}$ e verso della corrente con $t \in [4, 5]$ ms.

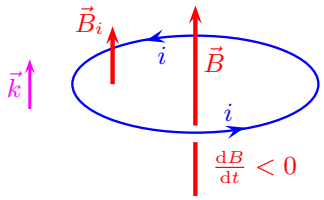


Fig. 4. Variazione di $\vec{B}$ e verso della corrente con $t \in [5, 10]$ ms.

corrente ridiventa positiva (fig. 4). Riassumiamo tali osservazioni nello schema seguente:

$$\begin{aligned}
0 \le t \le 3\,\mathrm{ms}, \qquad & \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} < 0 \implies i(t) > 0, \\
3\,\mathrm{ms} < t \le 5\,\mathrm{ms}, \qquad & \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = 0{,}2\,\mathrm{T/s} \implies i(t) = -0{,}15\,\mathrm{A}, \\
5\,\mathrm{ms} < t \le 10\,\mathrm{ms}, \qquad & \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} < 0 \implies i(t) > 0.
\end{aligned}$$

Il calcolo dei valori medi della corrente indotta nei tre intervalli deve far uso, formalmente, dell'espressione matematica che definisce il valor medio $\overline{f}$ di una funzione nell'intervallo $[a, b]$ ossia

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

Definiti per comodità di scrittura i tre istanti $t_1 = 3\,\mathrm{ms}$, $t_2 = 5\,\mathrm{ms}$, $t_3 = 10\,\mathrm{ms}$, l'applicazione di tale integrale nel primo intervallo assume la forma

$$\overline{i_1} = \frac{1}{(t_1 - 0)} \cdot \int_0^{t_1} i(t)\mathrm{d}t$$

che, per la (4) scriviamo come

$$\overline{i_1} = \frac{1}{t_1} \cdot \int_0^{t_1} \left(-\frac{S}{R} \cdot \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t = -\frac{S}{t_1 R} \cdot \int_0^{t_1} \left(\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t \tag{6}$$

dove si è estratto dall'integrale il fattore $-S/R$ in quanto costante. Poiché in ambito matematico è nota la proprietà

$$\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t = f(x) - f(a) \tag{7}$$

che, a seconda della notazione utilizzata, può assumere le forme alternative

$$\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t = \int_a^x \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x = \int_a^x \mathrm{d}f,$$

e collegate alla nozione di differenziale $\mathrm{d}f = (\mathrm{d}f/\mathrm{d}x)\mathrm{d}x$, allora la (6) si riduce alla

$$\overline{i_1} = -\frac{S}{t_1 R}\cdot\int_0^{t_1}\mathrm{d}B$$

e quindi per la (7)

$$\overline{i_1} = -\frac{S}{t_1 R}\cdot\left[B(t_1) - B(0)\right].$$

Dedotti dal grafico di figura 1 i valori $B(t_1) = -0{,}2\,\mathrm{mT}$ e $B(0) = 0\,\mathrm{mT}$, troviamo

$$\overline{i_1} = -\frac{(30\times10^{-4}\,\mathrm{m}^2)(-0{,}2\times10^{-3}\,\mathrm{T})}{(3\times10^{-3}\,\mathrm{s})(4\times10^{-3}\,\Omega)} = 0{,}05\,\mathrm{A}.$$

Nel secondo intervallo il valore medio della corrente $\overline{i_2}$ è, per (5), dato dall'integrale

$$\overline{i_2} = \frac{1}{t_2 - t_1}\cdot\int_{t_1}^{t_2} i(t)\mathrm{d}t$$

che, con le medesime deduzioni precedenti, riportiamo come

$$\overline{i_2} = -\frac{S}{(t_2 - t_1)R}\cdot\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}B = -\frac{S}{(t_2 - t_1)R}\cdot\left[B(t_2) - B(t_1)\right].$$

Essendo $B(t_2) = 0{,}2\,\mathrm{mT}$, il calcolo numerico fornisce il valore

$$\overline{i_2} = -\frac{(30\times10^{-4}\,\mathrm{m}^2)\left[(0{,}2+0{,}2)\times10^{-3}\,\mathrm{T}\right]}{\left[(5-3)\times10^{-3}\,\mathrm{s}\right](4\times10^{-3}\,\Omega)} = -0{,}15\,\mathrm{A}.$$

Analogamente, il valor medio $\overline{i_3}$ della corrente indotta è rappresentato da

$$\overline{i_3} = \frac{1}{t_3 - t_2}\cdot\int_{t_2}^{t_3} i(t)\mathrm{d}t$$

che si riconduce all'espressione

$$\overline{i_2} = -\frac{S}{(t_3 - t_2)R}\cdot\int_{t_2}^{t_3}\mathrm{d}B = -\frac{S}{(t_3 - t_2)R}\cdot\left[B(t_3) - B(t_2)\right]$$

e quindi al valore

$$\overline{i_3} = -\frac{(30\times10^{-4}\,\mathrm{m}^2)\left[(0-0{,}2)\times10^{-3}\,\mathrm{T}\right]}{\left[(10-5)\times10^{-3}\,\mathrm{s}\right](4\times10^{-3}\,\Omega)} = 0{,}03\,\mathrm{A}.$$

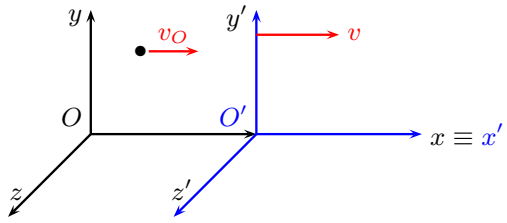


Fig. 1. Sistemi di riferimento inerziali O e O'.

Quesito n. 7: soluzione. (testo del quesito)

Definiti i due sistemi di riferimento $Oxyz$, solidale al laboratorio, e $O'x'y'z'$ solidale alla navicella in moto lungo l'asse x con velocità relativa ad O pari a $v = 0{,}80\,c$ (fig. 1) e indicati come

$$\Delta t = 2\,\text{ns} = 2 \times 10^{-9}\,\text{s}, \qquad \text{e} \qquad \Delta x = 25 \times 10^{-2}\,\text{m} \tag{1}$$

rispettivamente, l'intervallo di tempo e lo spostamento della particella rilevati in laboratorio, la velocità di questa nel sistema di origine O è evidentemente data dal rapporto

$$v_O = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{25 \times 10^{-2}\,\text{m}}{2 \times 10^{-9}\,\text{s}} = 1{,}25 \times 10^{8}\,\text{m/s} = 0{,}417\,c. \tag{2}$$

Per moti relativi lungo l'asse comune, la velocità v'_x osservata nel sistema O' in moto con velocità v rispetto ad O, è collegata alla velocità v_x, rilevata dall'osservatore O, dalle trasformazioni di Lorentz per le velocità

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \dfrac{v_x v}{c^2}}, \qquad v'_y = v_y, \qquad v'_z = v_z. \tag{3}$$

Identificato v_O con v_x, la prima delle (3) fornisce la velocità

$$v'_x = \frac{v_O - v}{1 - \dfrac{v_O v}{c^2}} = \frac{0{,}417\,c - 0{,}8c}{1 - \left(\dfrac{0{,}417 \cdot 0{,}8\,c^2}{c^2}\right)} = -0{,}575\,c = -1{,}73 \times 10^{8}\,\text{m/s}.$$

La distanza percorsa $\Delta x'$ e rilevata nel sistema O' così come l'intervallo di tempo $\Delta t'$ trascorso per O' si deducono applicando le trasformazioni di Lorentz

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \qquad t' = \frac{t - \dfrac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

che, poiché si stanno considerando intervalli, si riflettono nelle

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \qquad \Delta t' = \frac{\Delta t - \dfrac{v\Delta x}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

ciascuna delle quali con i valori presenti in (1) fornisce il risultato

$$\Delta x' = \frac{25 \times 10^{-2}\,\mathrm{s} - (0{,}8\,c) \cdot 2 \times 10^{-9}\,\mathrm{s}}{\sqrt{1-(0{,}8)^2}} = -0{,}383\,\mathrm{m}$$
$$\Delta t' = \frac{2 \times 10^{-9}\,\mathrm{s} - (0{,}8/c) \cdot 25 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}}{\sqrt{1-(0{,}8)^2}} = 2{,}22 \times 10^{-9}\,\mathrm{s}.$$

Notiamo infine che la velocità media v'_x rilevata dalla navicella si ottiene pure dal rapporto delle ultime due grandezze $v'_x = \Delta x'/\Delta t'$.

Quesito n. 8: soluzione. (testo del quesito)

Una particella con carica e, qual è il protone, immessa in un campo magnetico $\vec{B}$ con velocità $\vec{v}$ è soggetta alla forza di Lorentz

$$\vec{F} = e(\vec{v} \times \vec{B}). \tag{1}$$

Se si scompone la velocità nella somma di due componenti, $\vec{v}_\perp$ vettore componente perpendicolare al campo magnetico $\vec{B}$ e $\vec{v}_\parallel$ vettore componente parallelo a $\vec{B}$ per cui

$$\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel,$$

la forza di Lorentz si riscrive come

$$\vec{F} = e(\vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel) \times \vec{B} = e(\vec{v}_\perp \times \vec{B}) + e(\vec{v}_\parallel \times \vec{B}) = e\vec{v}_\perp \times \vec{B} \tag{2}$$

in quanto i due vettori $\vec{v}_\parallel$ e $\vec{B}$ sono paralleli per cui $\vec{v}_\parallel \times \vec{B} = \vec{0}$.

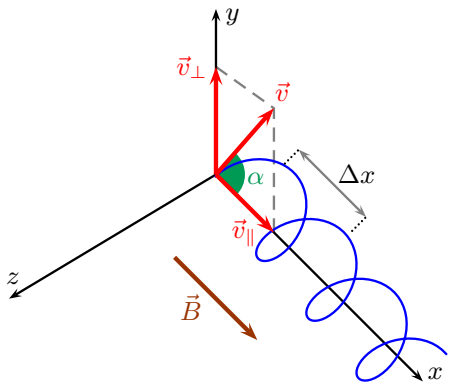


Fig. 1. Traiettoria del protone, velocità e campo magnetico.

Supposto il vettore $\vec{B}$ parallelo all'asse x (fig. 1), la (2) mostra come tale forza debba agire nel piano yz avendo nulla, in ogni istante del moto, la sua componente lungo l'asse x. Sempre dalla (2) ricaviamo il suo modulo

$$F = ev_\perp B \tag{3}$$

che, essendo costante, è responsabile del moto circolare uniforme della particella nel piano yz. Poiché lungo l'asse x nella direzione del campo non agiscono forze, la particella procede di moto rettilineo uniforme con la velocità $v_\parallel$. La combinazione di questi due moti genera, appunto, la traiettoria ad elica cilindrica richiamata dal testo.
Considerando il moto sul piano yz, l'applicazione della seconda legge della dinamica fornisce la relazione

$$ev_\perp B = m\frac{v_\perp^2}{r}$$

essendo r il raggio della circonferenza e $v_\perp^2/r$ l'accelerazione centripeta del moto. Da quest'ultima relazione possiamo determinare la componente $v_\perp$ ossia

$$v_\perp = \frac{eBr}{m} \tag{4}$$

e quindi, sostituendo i dati del problema e i valori delle costanti fisiche, ottenere il suo valore

$$v_\perp = \frac{(1{,}602\times10^{-19}\,\mathrm{C})(10^{-3}\,\mathrm{T})(10{,}5\times10^{-2}\,\mathrm{m})}{1{,}673\times10^{-27}\,\mathrm{kg}} = 1{,}01\times10^{4}\,\mathrm{m/s}.$$

Se T è il periodo di rotazione, la cinematica del moto circolare fornisce pure la relazione

$$v_\perp = \frac{2\pi r}{T} \tag{5}$$

per cui uguagliandola con (4) discende

$$\frac{eBr}{m} = \frac{2\pi r}{T} \quad\Longrightarrow\quad T = \frac{2\pi m}{eB}. \tag{6}$$

Poiché il passo Δx dell'elica (fig. 1) è la distanza percorsa alla velocità $v_\parallel$ nell'intervallo di tempo T la cinematica del moto rettilineo uniforme assicura $\Delta x = v_\parallel \cdot T$ e quindi la componente parallela al campo della velocità è, per la (6),

$$v_\parallel = \frac{\Delta x}{T} = \frac{eB\Delta x}{2\pi m} \tag{7}$$

e numericamente

$$v_\parallel = \frac{(1{,}602\times10^{-19}\,\mathrm{C})(10^{-3}\,\mathrm{T})(38{,}1\times10^{-2}\,\mathrm{m})}{2\pi(1{,}673\times10^{-27}\,\mathrm{kg})} = 5{,}81\times10^{3}\,\mathrm{m/s}.$$

Ottenute in (4) e (7) le due componenti della velocità, il suo modulo è

$$v = \sqrt{v_\perp^2 + v_\parallel^2}$$

che, con i valori numerici trovati risulta

$$v = \sqrt{(1{,}01\times10^{4})^2 + (5{,}81\times10^{3})}\,\mathrm{m/s} = 1{,}17\times10^{4}\,\mathrm{m/s}. \tag{8}$$

Infine l'angolo α che il vettore velocità $\vec{v}$ forma con la direzione del campo magnetico (fig. 1) è

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v_\perp}{v_\parallel} \quad\Longrightarrow\quad \alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{v_\perp}{v_\parallel}\right), \tag{9}$$

per cui, introdotti i valori numerici delle due componenti, assume il valore

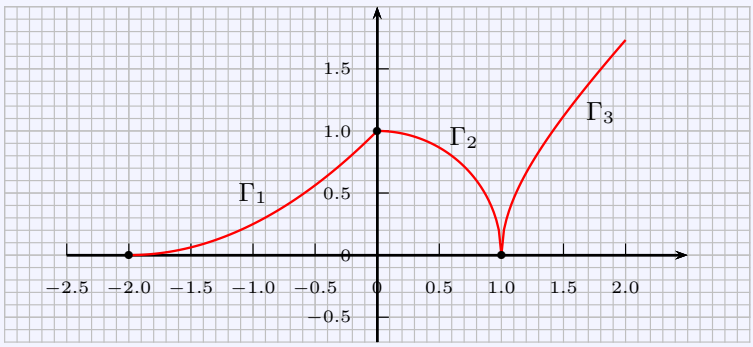
$$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{1{,}01\times10^{4}}{5{,}81\times10^{3}}\right) = 60{,}1^\circ.$$

ESAME 2023

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

- **Problema n. 1**

Il grafico in figura, rappresentativo della funzione continua $y = f(x)$, è unione dell'arco di parabola Γ_1, dell'arco di circonferenza Γ_2 e dell'arco di iperbole Γ_3.



a) Scrivere un'espressione analitica della funzione f definita a tratti nell'intervallo $[-2, 2]$, utilizzando le equazioni:

$$y = a(x+2)^2 \qquad x^2 + y^2 + b = 0 \qquad x^2 - y^2 + c = 0$$

e individuare i valori opportuni per i parametri reali a, b, c.
Studiare la derivabilità della funzione f e scrivere le equazioni delle eventuali rette tangenti nei punti di ascissa

$$x = -2 \qquad x = 0 \qquad x = 1 \qquad x = 2.$$

b) A partire dal grafico della funzione f, dedurre quello della sua derivata f' e individuare gli intervalli di concavità e convessità di $F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)\mathrm{d}t$.

c) Si consideri la funzione $y = \frac{1}{4}(x+2)^2$, definita nell'intervallo $[-2, 0]$, di cui Γ_1 è il grafico rappresentativo. Spiegare perché essa è invertibile e scrivere l'espressione analitica della sua funzione inversa h. Studiare la derivabilità di h e tracciarne il grafico.

d) Sia S la regione limitata del secondo quadrante, compresa tra il grafico Γ_1 e gli assi cartesiani. Determinare il valore del parametro reale k affinché la retta di equazione $x = k$ divida S in due regioni equivalenti.

Soluzione

- **Problema n. 2**

Fissato un parametro reale a, con $a \neq 0$, si consideri la funzione f_a così definita:

$$f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a}$$

il cui grafico sarà indicato con Ω_a.

a) Al variare del parametro a, determinare il dominio di f_a, studiarne le eventuali discontinuità e scrivere le equazioni di tutti i suoi asintoti.

b) Mostrare che, per $a \neq 1$, tutti i grafici Ω_a intersecano il proprio asintoto orizzontale in uno stesso punto e condividono la stessa retta tangente nell'origine.

c) Al variare di $a < 1$, individuare gli intervalli di monotonia della funzione f_a. Studiare la funzione $f_{-1}(x)$ e tracciarne il grafico Ω_{-1}.

d) Determinare l'area della regione limitata compresa tra il grafico Ω_{-1}, la retta ad esso tangente nell'origine e la retta $x = \sqrt{3}$.

Soluzione

Quesiti

1. Sia ABC un triangolo rettangolo in A. Sia O il centro del quadrato $BCDE$ costruito sull'ipotenusa, dalla parte opposta al vertice A.
   Dimostrare che O è equidistante dalle rette AB e AC.

   Soluzione

2. Un dado truccato con le facce numerate da 1 a 6, gode della proprietà di avere ciascuna faccia pari che si presenta con probabilità doppia rispetto a ciascuna faccia dispari. Calcolare le probabilità di ottenere, lanciando una volta il dado, rispettivamente:
   - un numero primo
   - un numero almeno pari a 3
   - un numero al più pari a 3.

   Soluzione

3. Considerata la retta r passante per i due punti $A(1, -2, 0)$ e $B(2, 3, -1)$, determinare l'equazione cartesiana della superficie sferica di centro $C(1, -6, 7)$ e tangente a r.

   Soluzione

4. Tra tutti i parallelepipedi a base quadrata di volume V, stabilire se quello di area totale minima ha anche diagonale di lunghezza minima.

Soluzione

5. Determinare l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $y = \sqrt{25 - x^2}$ nel suo punto di ascissa 3, utilizzando due metodi diversi.

Soluzione

6. Determinare i valori dei parametri reali a e b affinché:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - (ax^3 + bx)}{x^3} = 1.$$

Soluzione

7. Si consideri la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \arctan x & x < 0 \\ ax + b & x \geq 0. \end{cases}$$

Determinare per quali valori dei parametri reali a, b la funzione è derivabile. Stabilire se esiste un intervallo di $\mathbb{R}$ in cui la funzione f soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Motivare la risposta.

Soluzione

8. Data la funzione $f_a(x) = x^5 - 5ax + a$, definita nell'insieme dei numeri reali, stabilire per quali valori del parametro $a > 0$ la funzione possiede tre zeri reali distinti.

Soluzione

Problema n. 1: soluzione. (testo del problema)

a) Poiché l'equazione $y = a(x + 2)^2$ rappresentativa dell'arco di parabola Γ_1 assicura l'annullarsi dell'ordinata y in corrispondenza dell'ascissa $x = -2$, è sufficiente imporre il passaggio per $(0, 1)$ per determinare l'unico parametro incognito a ossia

$$(0,1) \in \Gamma_1 \quad \Longrightarrow \quad 1 = a(0+2)^2 \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{1}{4}. \tag{1}$$

Circa l'arco di circonferenza Γ_2 osservato che il suo raggio è unitario, il passaggio per $(0, 1)$ implica

$$(0,1) \in \Gamma_2 \quad \Longrightarrow \quad 0^2 + 1^2 + b = 0 \quad \Longrightarrow \quad b = -1. \tag{2}$$

Infine, il passaggio per $(1,0)$ dell'iperbole Γ_3 fornisce il valore di c

$$(1,0) \in \Gamma_3 \quad \Longrightarrow \quad 1^2 - 0^2 + c = 0 \quad \Longrightarrow \quad c = -1 \tag{3}$$

per cui l'espressione analitica di f risulta

$$f : \begin{cases} y = \frac{1}{4}(x+2)^2, & -2 \le x < 0 \ \wedge \ 0 \le y < 1 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0, & 0 \le x < 1 \ \wedge \ 0 < y \le 1 \\ x^2 - y^2 - 1 = 0, & 1 \le x \le 2 \ \wedge \ 0 \le y \le \sqrt{3} \end{cases} \tag{4}$$

e all'estremo destro f assume il valore $f(2) = \sqrt{3}$.
Poiché i grafici Γ_2 e Γ_3 sono descritti da equazioni nella forma implicita, riscriviamo la funzione f con la variabile y esplicitata a primo membro

$$f : \begin{cases} y = \frac{1}{4}(x+2)^2, & -2 \le x < 0 \ \wedge \ 0 \le y < 1 \\ y = \sqrt{1 - x^2}, & 0 \le x < 1 \ \wedge \ 0 < y \le 1 \\ y = \sqrt{x^2 - 1}, & 1 \le x \le 2 \ \wedge \ 0 \le y \le \sqrt{3} \end{cases} \tag{5}$$

e ciò ci permette un più agevole calcolo delle derivate.
Manifestamente il grafico della funzione continua f mostra come esista la derivata destra nel punto di ascissa -2 e come questa sia nulla in quanto questo punto è il vertice della parabola se estesa in $\mathbb{R}$, mentre in $x = 2$ esiste la sola derivata sinistra. Non è invece derivabile in $x = 0$ e in $x = 1$ mentre nei punti dell'insieme $]-2, 2[-\{0, 1\}$ la funzione non presenta problemi di derivabilità.
La dimostrazione di queste affermazioni discende dallo studio dei limiti dei rapporti incrementali associati: in $x = -2$ risulta

$$f'_+(-2) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{\frac{1}{4}h^2 - 0}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{h}{4} = 0$$

per cui la retta tangente è lo stesso asse x ossia $y = 0$.
Per determinare la derivata sinistra in $x = 2$ e la relativa retta tangente riprendiamo l'espressione (5) con la variabile y esplicitata a primo membro

$$y = \sqrt{x^2 - 1} = f(x) \tag{6}$$

per poi costruire il rapporto incrementale

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{\sqrt{(2+h)^2 - 1} - \sqrt{2^2 - 1}}{h} = \frac{\sqrt{h^2 + 4h + 3} - \sqrt{3}}{h}. \tag{7}$$

Poiché il limite dell'espressione (7) è indeterminato (caso $0/0$), riscriviamo la stessa moltiplicando il numeratore e il denominatore per $\sqrt{h^2 + 4h + 3} + \sqrt{3}$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{h^2 + 4h + 3} - \sqrt{3}}{h} \cdot \frac{\sqrt{h^2 + 4h + 3} + \sqrt{3}}{\sqrt{h^2 + 4h + 3} + \sqrt{3}} &= \frac{h^2 + 4h + 3 - 3}{h(\sqrt{h^2 + 4h + 3} + \sqrt{3})} \\ &= \frac{h + 4}{\sqrt{h^2 + 4h + 3} + \sqrt{3}}, \end{aligned}$$

cosicché il limite sinistro di questo rapporto è

$$f'_-(2) = \lim_{h\to 0-} \frac{h+4}{\sqrt{h^2+4h+3}+\sqrt{3}} = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \tag{8}$$

in quanto

$$\lim_{h\to 0-} \sqrt{h^2+4h+3} = \sqrt{0+0+3} = \sqrt{3}.$$

In alternativa possiamo derivare l'equazione (6) che, indipendentemente dai limiti imposti può essere definita in $x \geq 1$,

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}},$$

calcolandola poi in $x = 2$

$$f'_-(2) = \frac{2}{\sqrt{4-1}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

La retta tangente risulta pertanto

$$y - f(2) = f'_-(2)(x-2) \quad \Longrightarrow \quad y - \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}(x-2)$$

ossia

$$y = \frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1). \tag{9}$$

Nel punto di ascissa $x = 0$ non esiste la retta tangente ma essendo il coefficiente angolare sinistro dato dalla $y' = \frac{2}{4}(x+2)$ calcolata in $x = 0$ cioè $y'_-(0) = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$ mentre, manifestamente quello destro è $y'_+(0) = 0$, questo punto risulta per la funzione f, un punto angoloso.
Se $x = 1$, la funzione f non è derivabile e presenta in questo punto una cuspide con retta tangente verticale $x = 1$. Ciò si giustifica graficamente ricordando le proprietà geometriche della circonferenza e dell'iperbole dato che quest'ultima presenta il suo vertice nel punto $(1, 0)$. Formalizziamo queste osservazioni riprendendo l'equazione esplicita (5) $y = \sqrt{1-x^2}$ di Γ_2 e studiamo il limite del rapporto incrementale sinistro in $x = 1$

$$\lim_{h\to 0-} \frac{\sqrt{1-(1+h)^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{\sqrt{-2h-h^2}}{h}$$

$$\lim_{h\to 0-} \left[-\frac{\sqrt{-2h-h^2}}{(-h)}\right] = \lim_{h\to 0-} \left(-\sqrt{\frac{-2}{h}-1}\right) = -\infty \tag{10}$$

in quanto $\lim_{h\to 0-}(-2/h) = +\infty$. Per quanto riguarda il rapporto incrementale dell'arco di iperbole Γ_3, ancora da (5), risulta

$$\lim_{h\to 0+} \frac{\sqrt{(1+h)^2-1}-0}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{\sqrt{2h+h^2}}{h} = \lim_{h\to 0+} \sqrt{\frac{2}{h}+1} = +\infty \tag{11}$$

in quanto $\lim_{h\to 0}(2/h) = +\infty$.

Come accennato, per i valori interni al dominio $[-2, 2]$ di f e ad esclusione di $\{0, 1\}$ le espressioni (5) non presentano problemi di derivabilità.

b) A partire dal grafico della funzione f, la derivata f' nell'intervallo $[-2, 0]$ dev'essere crescente e positiva assumendo agli estremi i valori $f'_+(-2) = 0$ e $f'_-(0) = 1$. Diversamente in $[0, 1[$ e a partire da $f'_+(0) = 0$, la derivata f' è decrescente e negativa e, come determinato precedentemente studiando il rapporto incrementale (10), presenta il limite sinistro in $x = 1$ pari a

$$\lim_{x\to 1-} f'(x) = -\infty.$$

Nell'intervallo $]1, 2]$ a funzione f' è decrescente e positiva e presenta agli estremi i limiti

$$\lim_{x\to 1+} f'(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 2-} f'(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

entrambi giustificati dal precedente studio dei rapporti incrementali (11) e (8). Pertanto il grafico di f' (fig. 1) presenta un asintoto verticale di equazione $x = 1$ e tale valore rappresenta un punto di discontinuità di seconda specie mentre $x = 0$ è un punto di discontinuità di prima specie.

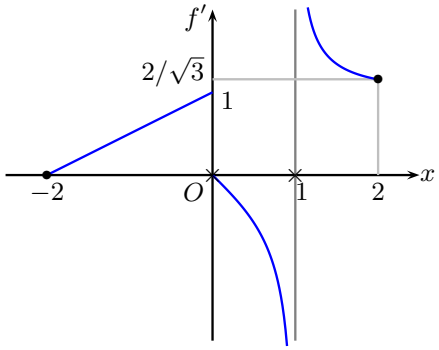


Fig. 1. Grafico qualitativo di $f'(x)$.

In termini analitici, il calcolo delle derivate dei tre rami di f e a partire dalle equazioni (5) fornisce per f' le equazioni

$$f' : \begin{cases} y' = \frac{1}{2}x + 1, & -2 \le x < 0 \\ y' = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, & 0 < x < 1 \\ y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}, & 1 < x \le 2. \end{cases} \tag{12}$$

La continuità della funzione f garantisce, per il teorema di Torricelli-Barrow, l'esistenza della funzione integrale

$$F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)\mathrm{d}t \tag{13}$$

per cui, al fine di individuare i suoi intervalli di convessità e concavità dovremo studiare il segno della sua derivata seconda. D'altra parte per il citato teorema è anche $F'(x) = f(x)$

per cui $F''(x) = f'(x)$ e quindi dobbiamo reinterpretare la (12) riscrivendola come

$$F'' : \begin{cases} y'' = \frac{1}{2}x + 1, & -2 \le x < 0 \\ y'' = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, & 0 < x < 1 \\ y'' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}, & 1 < x \le 2. \end{cases} \tag{14}$$

Il segno di questa funzione è positivo o nullo nei due sottoinsiemi

$$y'' = \frac{1}{2}x + 1 \ge 0 \quad \text{se} \quad -2 \le x < 0,$$
$$y'' = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} > 0 \quad \text{se} \quad 1 < x \le 2,$$

mentre è negativo in

$$\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} < 0 \quad \text{se} \quad 0 < x < 1.$$

Pertanto la funzione $F(x)$ è convessa in $[-2, 0[\cup]1, 2]$ mentre è concava in $]0, 1[$ (fig. 2). Sebbene la funzione F sia derivabile in tutto il suo dominio $[-2, 2]$ e quindi pure continua, non è dotata di derivata seconda in $x = 0$ e $x = 1$. D'altra parte in corrispondenza di questi valori la sua derivata prima risulta $F'(0) = f(0) = 1$ e $F'(1) = f(1) = 0$ cosicché in $x = 0$ essa presenta un flesso obliquo mentre in $x = 1$ possiede un flesso orizzontale.

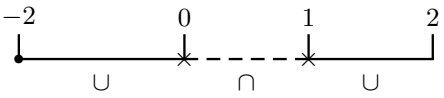


Fig. 2. Segno di $F''(x)$.

c) La funzione di equazione $y = \frac{1}{4}(x+2)^2$ è invertibile in quanto risulta monotona crescente nell'intervallo chiuso $[-2, 0]$ avendo essa in $x \in]-2, 0]$ derivata prima $y' = \frac{1}{2}x+1 > 0$ e nulla solo nell'estremo $x = -2$. Poiché il suo codominio è l'intervallo chiuso $[0, 1]$, l'espressione rappresentativa dell'inversa h si ottiene risolvendo la sua equazione nell'incognita x

$$(x+2)^2 = 4y \quad \Longrightarrow \quad |x+2| = 2\sqrt{y} \quad \Longrightarrow \quad x = 2\sqrt{y} - 2,$$

seguita dalla trasformazione di simmetria di equazioni $x_1 = y \wedge y_1 = x$ che permette di associare all'asse orizzontale la variabile indipendente x_1. L'equazione analitica cercata è quindi

$$h\colon y_1 = 2\sqrt{x_1} - 2 \quad \text{con} \quad 0 \le x_1 \le 1 \quad \text{e} \quad -2 \le y_1 \le 0. \tag{15}$$

La sua derivata è

$$h'\colon y_1' = \frac{1}{\sqrt{x_1}} > 0 \quad \text{se} \quad 0 < x_1 \le 1$$

per cui h possiede la medesima monotonia crescente della funzione iniziale ma non è invece derivabile nel punto di ascissa nulla in quanto la retta tangente è qui verticale.

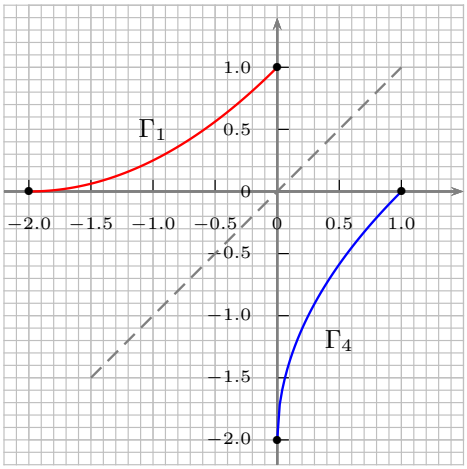


Fig. 3. Grafico Γ_4 dell'inversa h e Γ_1.

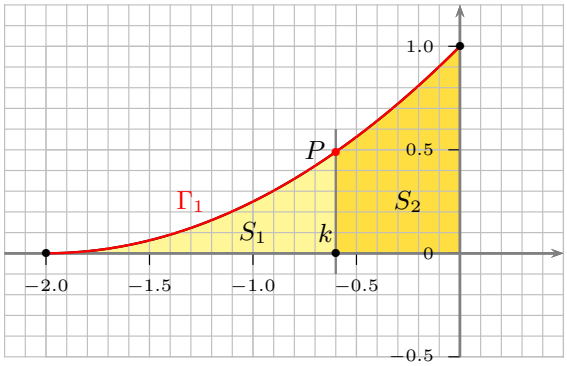


Fig. 4. Regione S e sue parti $S = S_1 \cup S_2$.

Il grafico Γ_4 è, per la trasformazione applicata, il simmetrico di Γ_1 rispetto alla bisettrice del I e III quadrante (fig. 3).

d) Determiniamo il valore del parametro k della retta $r\colon x = k$ $(-2 < k < 0)$ che divide la regione S in due parti equivalenti $\mathcal{A}(S_1) = \mathcal{A}(S_2)$ (in colore nella figura 4) esprimendo le due aree tramite gli integrali definiti

$$\mathcal{A}(S_1) = \mathcal{A}(S_2) \quad \Longrightarrow \quad \int_{-2}^{k} \frac{1}{4}(x+2)^2\,\mathrm{d}x = \int_{k}^{0} \frac{1}{4}(x+2)^2\,\mathrm{d}x,$$

dalla quale è pure

$$\int_{-2}^{k} (x+2)^2\,\mathrm{d}x = \int_{k}^{0} (x+2)^2\,\mathrm{d}x. \tag{16}$$

Poiché l'integrale indefinito della funzione integranda $(x+2)^2$ è dato dalle primitive

$$\int (x+2)^2\,\mathrm{d}x = \frac{(x+2)^3}{3} + c,$$

riscriviamo la (16) come

$$\left|\frac{(x+2)^3}{3}\right|_{-2}^{k} = \left|\frac{(x+2)^3}{3}\right|_{k}^{0}$$

che, esplicitata, si riduce all'equazione nell'incognita k

$$\frac{(k+2)^2}{3} - 0 = \frac{8}{3} - \frac{(k+2)^3}{3}.$$

La sua soluzione dà infine il valore del parametro k

$$(k+2)^3 = 4 \quad \Longrightarrow \quad k+2 = \sqrt[3]{4} \quad \Longrightarrow \quad k = -2 + \sqrt[3]{4} \approx -0{,}4126.$$

Problema n. 2: soluzione. (testo del problema)

a) La funzione razionale fratta f_a

$$f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} \tag{1}$$

è espressa dal rapporto di due polinomi dello stesso grado. Escluso dal testo il caso $a = 0$, la stessa funzione si può riscrivere in forme alternative con l'eseguire la divisione del numeratore $N(x)$ e denominatore $D(x)$ così da giungere alla forma

$$f_a(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

con $Q(x)$ polinomio quoziente e $R(x)$ polinomio resto. Pertanto disposti opportunamente il numeratore e il denominatore nello schema seguente e procedendo nel modo usuale

x^2	$-ax$	0	1
$-x^2$		a	$x^2 - a$
0	$-ax$	a	

otteniamo per la funzione il quoziente di grado zero $Q(x) = 1$ mentre il resto risulta $R(x) = a(1-x)$. Riscriviamo quindi la funzione come

$$f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = 1 + \frac{a(1-x)}{x^2 - a}, \tag{2}$$

forma che ci permette di riconoscere facilmente la presenza di un asintoto orizzontale in quanto il secondo addendo, come vedremo, si annulla per $x \to \infty$.
In ogni caso, l'unica condizione che determina il dominio è legata al denominatore che dev'essere

$$D(x) = x^2 - a \neq 0 \tag{3}$$

le cui soluzioni dipendono dal segno del parametro a: si delineano pertanto due diverse possibilità: $a > 0$ oppure $a < 0$.

• *Condizione* $a > 0$. Nell'ipotesi che sia $a > 0$, la condizione (3) è risolta dai valori

$$x \in \mathbb{R} \wedge x \neq \pm\sqrt{a}$$

e nel caso sia $\sqrt{a} \neq 1$ la funzione (2) presenta i due asintoti verticali di equazione $x = \pm\sqrt{a}$ in quanto sussistono i limiti

$$\lim_{x\to\pm\sqrt{a}} f_a(x) = \infty$$

essendo

$$\lim_{x\to\pm\sqrt{a}}(x^2 - a) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to\pm\sqrt{a}} a(1-x) = a(1 \mp \sqrt{a}) \neq 0.$$

In corrispondenza dei valori $x = \pm\sqrt{a}$, la funzione f_a possiede quindi due punti di discontinuità di seconda specie.
Se invece $\sqrt{a} = 1$ cioè $a = 1$, la funzione si riduce alla

$$f_1(x) = 1 + \frac{1-x}{x^2-1} = 1 - \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} \tag{4}$$

con dominio $x \neq \pm 1$. L'equazione (4) caratterizza una funzione omografica con asintoto verticale $x = -1$ il cui grafico è quello di una iperbole equilatera traslata. In questo caso la f_1 ha in $x = 1$ una discontinuità di terza specie in quanto il limite in questo punto per la scomposizione (4), è

$$\lim_{x\to 1} f_1(x) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Manifestamente la funzione (4) possiede pure un asintoto orizzontale di equazione $y_A = 1$ in quanto valgono i seguenti limiti

$$\lim_{x\to\infty} f_1(x) = \lim_{x\to\infty}\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = 1 \quad \text{poiché} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1} = 0.$$

• *Condizione* $a < 0$. Nel caso sia $a < 0$ il dominio di f_a è l'insieme $\mathbb{R}$ dei reali poiché il denominatore $D(x)$ non si annulla. Inoltre, dato che i polinomi del numeratore $N(x)$ e del denominatore $D(x)$ sono funzioni continue, lo è pure la f_a. Nel dominio $\mathbb{R}$ non vi sono pertanto punti di discontinuità o asintoti verticali mentre sussiste ancora l'asintoto orizzontale $y_A = 1$ avendosi, per lo studio dei limiti delle funzioni razionali fratte,

$$\lim_{x\to\infty}\left[1 + \frac{a(1-x)}{x^2-a}\right] = 1$$

con

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a(1-x)}{x^2-a} = \lim_{x\to\infty}\frac{ax(1/x-1)}{x^2(1-a/x^2)} = \lim_{x\to\infty}\frac{a(1/x-1)}{x(1-a/x^2)} = 0$$

e $\lim_{x\to\infty}(1/x) = \lim_{x\to\infty}(1/x^2) = 0$.

b) Le intersezioni con l'asintoto orizzontale $y_A = 1$ si determinano studiando l'equazione $f_a(x) - y_A = 0$ che, in base alla (2), diviene

$$1 + \frac{a(1-x)}{x^2-a} - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{a(1-x)}{x^2-a} = 0$$

e cioè

$$1 - x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1.$$

Indipendentemente dal parametro $a \neq \{0, 1\}$, tutte le curve Ω_a della famiglia f_a passano quindi per il punto $(1, f_a(1)) \equiv (1, 1)$.
Possiamo ritrovare questo risultato ed estenderlo, riprendendo l'espressione (1)

$$y = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a}$$

che, portata a forma intera e non appena si sia posto a fattore il parametro a diviene

$$y(x^2 - a) = x^2 - ax \quad \Longrightarrow \quad x^2(y - 1) + a(x - y) = 0.$$

La famiglia di grafici Ω_a descritta da questa equazione potrà passare per dei punti fissi cioè con coordinate indipendenti dal parametro, se sono soddisfatte le due condizioni

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2(y - 1) = 0. \end{cases}$$

E poiché questo sistema è risolto dalle coppie

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0, \end{cases}$$

ne discende che, in aggiunta all'intersezione con l'asintoto orizzontale, tutti i grafici Ω_a passano pure per l'origine.
Poiché la derivata prima è

$$f'_a(x) = 0 + a\left[\frac{-(x^2 - a) - 2x(1 - x)}{(x^2 - a)^2}\right] = \frac{a(x^2 - 2x + a)}{(x^2 - a)^2} \tag{5}$$

ed essa, nell'origine, assume il valore indipendente da a

$$f'_a(0) = \frac{a^2}{a^2} = 1,$$

allora le curve Ω_a, in aggiunta al passaggio per l'origine, possiedono in questo punto la medesima retta tangente t

$$t: y - f_a(0) = f'_a(0)(x - 0) \quad \Longrightarrow \quad y - 0 = x \quad \Longrightarrow \quad y = x$$

e questa coincide con la bisettrice del I e III quadrante.

c) Per determinare gli intervalli di monotonia delle funzioni, studiamo il segno della derivata prima (5)

$$f'_a(x) = \frac{a(x^2 - 2x + a)}{(x^2 - a)^2} \tag{6}$$

per cui appare necessario supporre quale sia il segno del parametro a.

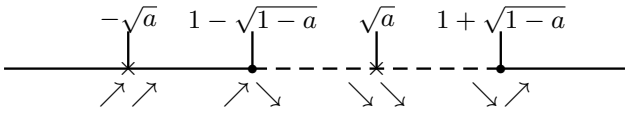


Fig. 1. Segno di $f'_a(x)$ con $0 < a < 1$.

• *Condizione* $0 < a < 1$. Se quindi $0 < a < 1$, il termine responsabile della variazione di segno di f'_a è il polinomio quadratico $x^2 - 2x + a$. Pertanto

$$f'_a(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 2x + a \geq 0$$

e le soluzioni sono gli intervalli illimitati

$$x \leq 1 - \sqrt{1-a} \quad \veebar \quad x \geq 1 + \sqrt{1-a}.$$

Tenendo presente il dominio $x \neq \pm\sqrt{a}$ e le disuguaglianze ($a \in]0, 1[$)

$$-\sqrt{a} < 1 - \sqrt{1-a}, \quad \sqrt{a} < 1 + \sqrt{1-a},$$

riassumiamo nello schema 1 il segno complessivo di f'_a e, simbolicamente, la sua monotonia. La originaria f_a raggiunge perciò un massimo (relativo) in corrispondenza dell'ascissa $x_M = 1 - \sqrt{1-a}$ ed un minimo in $x_m = 1 + \sqrt{1-a}$ mentre risulta crescente in intorni dell'asintoto verticale di equazione $x = -\sqrt{a}$ e decrescente in corrispondenza di $x = \sqrt{a}$.

• *Condizione* $a < 0$. Nel caso sia $a < 0$, dalla (6) dev'essere

$$f'_a(x) \geq 0 \quad \text{se} \quad x^2 - 2x + a \leq 0$$

che è risolta dai valori dell'intervallo

$$1 - \sqrt{1-a} \leq x \leq 1 + \sqrt{1-a}. \tag{7}$$

Considerando che, in tal caso, il dominio è l'insieme $\mathbb{R}$, riassumiamo graficamente il segno complessivo nella figura 2 con la quale evidenziamo la presenza di un massimo e di un minimo in corrispondenza, rispettivamente, delle ascisse $x_M = 1 + \sqrt{1-a}$ e $x_m = 1 - \sqrt{1-a}$.

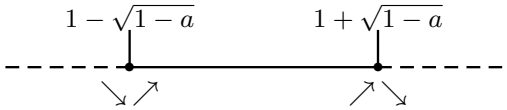


Fig. 2. Segno di $f'_a(x)$ con $a < 0$.

Ponendo, come richiesto $a = -1$, la funzione è descritta dall'equazione

$$f_{-1}(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + 1} = 1 + \frac{x - 1}{x^2 + 1}, \tag{8}$$

è positiva o nulla in $x^2 + x \geq 0$ ossia in $x \leq -1 \veebar x \geq 0$, dalla (5) possiede derivata prima

$$f'_{-1}(x) = \frac{-(x^2 - 2x - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

il cui segno, per la (7), è positivo nell'intervallo

$$1 - \sqrt{2} \le x \le 1 + \sqrt{2}.$$

Il calcolo della derivata seconda fornisce

$$\begin{aligned} f''_{-1}(x) &= \frac{(-2x+2)(x^2+1)^2 - 2(x^2+1)2x(-x^2+2x+1)}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{(x^2+1)[(-2x+2)(x^2+1) - 4x(-x^2+2x+1)]}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{2(x^3-3x^2-3x+1)}{(x^2+1)^3} \end{aligned} \tag{9}$$

per cui il suo segno dipende dal polinomio cubico $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 \ge 0$. Poiché questo polinomio si annulla per $x = -1$ lo si può scomporre utilizzando il metodo di Ruffini,

	1	−3	−3	1
−1		−1	4	−1
	1	−4	1	0

nei fattori $(x+1)(x^2-4x+1) \ge 0$. Poiché il segno di questi è

$$x + 1 \ge 0 \implies x \ge -1$$
$$x^2 - 4x + 1 \ge 0 \implies x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3} \implies x \le 2 - \sqrt{3} \veebar x \ge 2 + \sqrt{3}$$

segue in fig. 3 il segno complessivo di f''_{-1}.

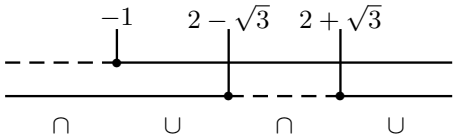


Fig. 3. Segno di $f''_{-1}(x)$.

La funzione possiede quindi tre punti di flesso aventi ascisse

$$x_1 = -1 \quad x_2 = 2 - \sqrt{3}, \quad x_3 = 2 + \sqrt{3}$$

e risulta concava per $x < -1$ oppure per $x \in [x_2, x_3]$, convessa in $[-1, x_2]$ e per $x \ge x_3$. Considerando che $f_{-1}(x) \ge 0$ per $x \le -1 \veebar x \ge 0$ e che essa interseca l'asintoto in $x = 1$, riportiamo in figura 4 il grafico Ω_{-1} (in blu i punti di flesso). I punti più significativi sono:

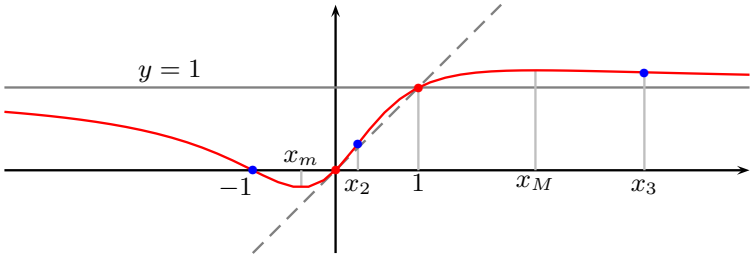


Fig. 4. Grafico Ω_{-1} di f_{-1}.

$$\text{il minimo assoluto: } (1-\sqrt{2}, f_{-1}(1-\sqrt{2})) \implies \left(1-\sqrt{2};\ \frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx (-0{,}414; -0{,}207),$$

$$\text{il massimo assoluto: } (1+\sqrt{2}, f_{-1}(1+\sqrt{2})) \implies \left(1+\sqrt{2};\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx (2{,}414; 1{,}207),$$

$$\text{i flessi: } (-1,0), \quad (2-\sqrt{3}, f_{-1}(2-\sqrt{3})) \implies \left(2-\sqrt{3};\ \frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \approx (0{,}268; 0{,}317)$$

$$(2+\sqrt{3}, f_{-1}(2+\sqrt{3})) \implies \left(2+\sqrt{3};\ \frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \approx (3{,}732; 1{,}183)$$

d) Esprimiamo l'area della regione $\mathcal{R}$ compresa tra il grafico Ω_{-1}, la bisettrice dei primo quadrante e la retta di equazione $x = \sqrt{3}$ (fig. 5) con l'integrale definito (10)

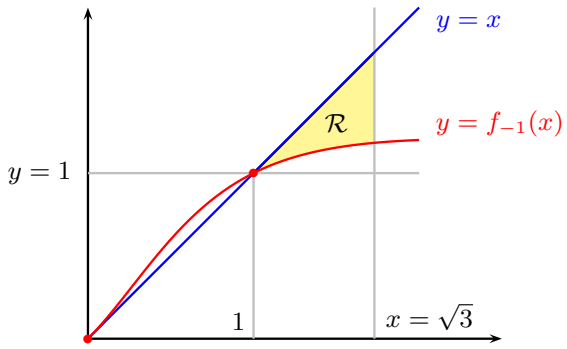


Fig. 5. Regione compresa tra Ω_{-1} e le rette $y = x$ e $x = \sqrt{3}$.

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}) = \int_1^{\sqrt{3}} \left[x - f_{-1}(x)\right] \mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{3}} \left[x - \left(1 + \frac{x-1}{x^2+1}\right)\right] \mathrm{d}x \tag{10}$$

dove abbiamo utilizzata l'espressione (8) della funzione f_{-1}. La funzione integranda si può ulteriormente scomporre nei termini

$$\int_1^{\sqrt{3}} \left(x - 1 - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right) \mathrm{d}x$$

per cui, riconosciuto l'integrale elementare dell'arcotangente e passando all'integrale indefinito, abbiamo

$$\int \left(x - 1 - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right) \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - x + \operatorname{arctg}(x) - \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}.$$

L'integrale rimasto si può riportare ad uno elementare con la sostituzione $t = x^2 + 1$ dalla quale $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$,

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t},$$

per cui le corrispondenti primitive sono

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln|t| + c = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c.$$

L'area (10) è in definitiva

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathcal{R}) &= \left|\frac{x^2}{2} - x + \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right|_1^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{3}{2} - \sqrt{3} + \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\ln 4 - \left(\frac{1}{2} - 1 + \operatorname{arctg}(1) - \frac{1}{2}\ln 2\right) \\ &= 2 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0{,}1832.\end{aligned}$$

Quesito n. 1: soluzione. (testo del quesito)

Siano $\angle ABC = \beta$ e $\angle ACB = \gamma$ gli angoli acuti del triangolo rettangolo $\triangle ABC$ e, costruito il quadrato $BCDE$ sull'ipotenusa BC, siano H e K le proiezioni del centro O sui prolungamenti dei lati AB e AC (fig. 1).

• Per una prima dimostrazione di carattere sintetico consideriamo i triangoli rettangoli HBO e KCO. Le rispettive ipotenuse hanno la medesima lunghezza $\overline{OB} = \overline{OC}$ essendo esse pari alla metà delle diagonali del quadrato $BCDE$. Le ampiezze degli angoli $\angle HBO$ e $\angle KCO$ sono

$$\angle HBO = \angle HBC + \angle CBO = \beta + \frac{\pi}{4} \tag{1}$$

e

$$\begin{aligned}\angle KCO &= \pi - \angle ACO = \pi - (\angle ACB + \angle BCO) \\ &= \pi - \left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4} - \gamma.\end{aligned} \tag{2}$$

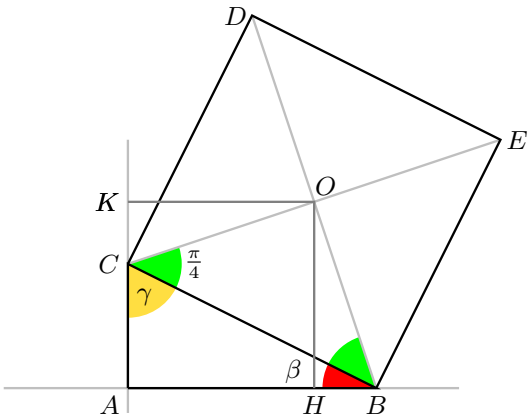


Fig. 1. Triangolo rettangolo ABC e quadrato $BCDE$ sull'ipotenusa.

D'altra parte in un triangolo rettangolo gli angoli acuti sono complementari cosicché in $\triangle ABC$ vale la relazione

$$\beta + \gamma = \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad \gamma = \frac{\pi}{2} - \beta. \tag{3}$$

Sostituita quest'ultima nella (2)

$$\angle KCO = \frac{3\pi}{4} - \gamma = \frac{3\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \frac{\pi}{4} + \beta = \angle HBO.$$

I due triangoli rettangoli sono quindi congruenti e, in particolare, hanno congruenti i cateti OH e OK.

• Per una dimostrazione alternativa di carattere trigonometrico, sia $\overline{BC} = 2l$ la misura dell'ipotenusa BC cosicché i segmenti OB e OC misurano $\overline{OB} = \overline{OC} = 2l/\sqrt{2} = l\sqrt{2}$. Nel triangolo rettangolo HBO, l'ampiezza dell'angolo HBO è, per la (1),

$$\angle HBO = \beta + \frac{\pi}{4}$$

cosicché il cateto OH è

$$\overline{OH} = \overline{OB}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) = l\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right). \tag{4}$$

Nel triangolo KCO, l'angolo KCO misura, come visto in (2),

$$\angle KCO = \frac{3\pi}{4} - \gamma$$

e di conseguenza

$$\overline{OK} = \overline{OC}\,\mathrm{sen}\,\angle KCO = l\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{4} - \gamma\right). \tag{5}$$

Poiché per la (3) sussiste la relazione

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta,$$

questa sostituita nella (5), dà

$$\overline{OK} = l\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left[\frac{3\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right] = l\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + \beta\right) = l\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)$$

e quindi, per la (4), concludiamo che $\overline{OK} = \overline{OH}$.

Quesito n. 2: soluzione. (testo del quesito)

Se a è la probabilità che in un lancio escano i numeri dispari 1, 3, 5 cioè, più formalmente

$$p(1) = p(3) = p(5) = a, \tag{1}$$

allora, per la proprietà enunciata del dado truccato, è anche

$$p(2) = p(4) = p(6) = 2a. \tag{2}$$

Poiché in un lancio è certa l'uscita di un numero tra 1 e 6, la corrispondente probabilità P equivale ad un evento certo ossia è $P = 1$. Ne segue che, essendo l'uscita di un dato numero incompatibile con i rimanenti, dev'essere

$$P = 1 = \sum_{i=1}^{6} = p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6)$$

e quindi in base alle precedenti

$$1 = a + 2a + a + 2a + a + 2a = 9a \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{1}{9}. \tag{3}$$

Primo caso. Ricordata la definizione di numero primo ossia come un numero intero maggiore di 1 e divisibile solo per 1 e per sé stesso, la probabilità P_1 di uscita di un numero primo è data dalla $P_1 = p(2) + p(3) + p(5)$ in quanto gli eventi di uscita di 2, 3 e 5 sono incompatibili. Per le relazioni precedenti risulta quindi

$$P_1 = 2a + a + a = 4a = \frac{4}{9}.$$

Secondo caso. Allo stesso modo, l'uscita di un numero almeno pari a 3 equivale all'uscita dei numeri 3, 4, 5 e 6 per cui

$$P_2 = p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = a + 2a + a + 2a = 6a = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Terzo caso. Affinché esca un numero al massimo pari a 3, devono presentarsi i numeri 3, 2 e 1 per cui

$$P_3 = p(3) + p(2) + p(1) = a + 2a + a = 4a = \frac{4}{9}.$$

Quesito n. 3: soluzione. (testo del quesito)

Assegnati i punti $A(1, -2, 0)$ e $B(2, 3, -1)$ nel sistema cartesiano $Oxyz$, sia

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (1, 5, -1)$$

il vettore che li collega (fig. 1). Detto $P(x, y, z)$ un punto qualsiasi della retta r, il vettore $\overrightarrow{AP} = (x - 1, y + 2, z - 0)$ è collineare ad $\overrightarrow{AB}$ per cui rappresentiamo la retta r tramite la condizione di collinearità come $\overrightarrow{PA} = t\overrightarrow{AB}$ con $t \in \mathbb{R}$. Da questa deriva la sua espressione cartesiana

$$r : \begin{cases} x - x_A = t(x_B - x_A) \\ y - y_A = t(y_B - y_A) \\ z - z_A = t(z_B - z_A) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - 1 = t(2 - 1) \\ y + 2 = t(3 + 2) \\ z - 0 = t(-1 - 0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 5t - 2 \\ z = -t. \end{cases} \tag{1}$$

Il piano π passante per il centro $C(1, -6, 7)$ della sfera è ortogonale alla retta r e deve passare per il punto di tangenza T. Per determinarne l'equazione, sia $P(x, y, z)$ un suo punto generico per cui i vettori (fig. 1)

$$\overrightarrow{AB} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{CP} = (x - x_C, y - y_C, z - z_C) = (x - 1, y + 6, z - 7)$$

dovranno essere perpendicolari. Questa proprietà impone l'annullarsi del loro prodotto scalare

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CP} = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x - 1) + 5(y + 6) - (z - 7) = 0$$

per cui di conseguenza otteniamo

$$\pi\colon x + 5y - z + 36 = 0. \tag{2}$$

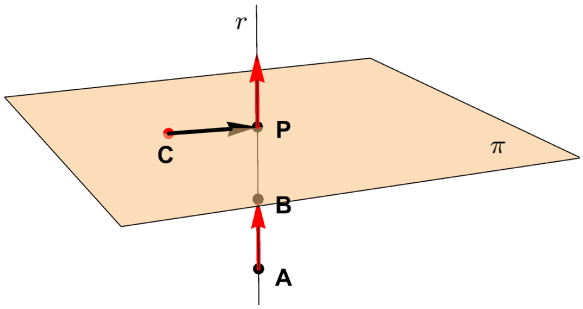


Fig. 1. Perpendicolarità tra retta r e piano π.

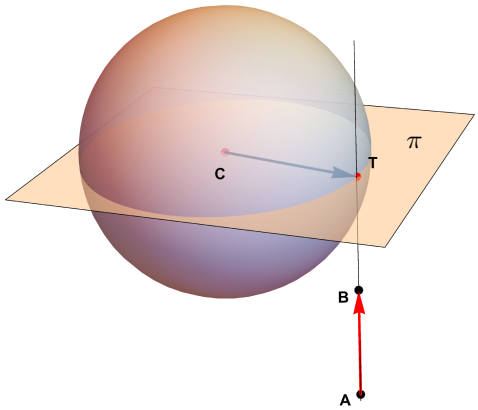


Fig. 2. Appartenenza di T al piano π e alla sfera.

Poiché $r \cap \pi = \{T\}$, determiniamo le coordinate del punto di tangenza T (fig. 2) intersecando retta e piano. È a tal fine sufficiente inserire le equazioni (1) nella (2)

$$(t+1) + 5(5t-2) - (-t) + 36 = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = -1 \tag{3}$$

dalla quale il valore del parametro t che individua sulla retta il punto T. Le coordinate di T sono quindi

$$T: \begin{cases} x_T = -1 + 1 = 0 \\ y_T = 5(-1) - 2 = -7 \\ z_T = -(-1) = 1. \end{cases} \tag{4}$$

Ne segue che la lunghezza del raggio della sfera, pari al modulo di $\overrightarrow{CT}$, risulta

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x_C - x_T)^2 + (y_C - y_T)^2 + (z_C - z_T)^2} \\ &= \sqrt{(1-0)^2 + (-6+7)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{38}, \end{aligned}$$

mentre l'equazione della sfera è, in definitiva,

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 = r^2 \quad \Longrightarrow \quad (x-1)^2 + (y+6)^2 + (z-7)^2 = 38.$$

Quesito n. 4: soluzione. (testo del quesito)

Il testo del quesito non specifica quale parallelepipedo si intenda e, in particolare, quali siano gli angoli (α e β nella fig. 1) che determinano la direzione degli spigoli che collegano le due basi quadrate. Se quindi alla lunghezza $x > 0$ del lato delle due basi quadrate e all'altezza $h > 0$ si aggiungono pure queste ulteriori due variabili il problema non è, con le usuali conoscenze, risolvibile.

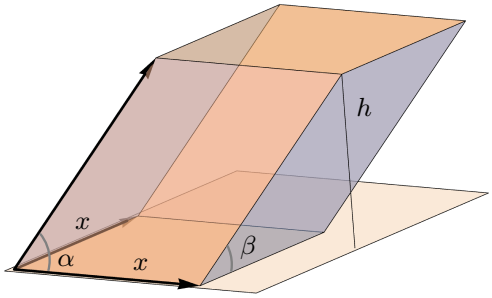


Fig. 1. Generico parallelepipedo (a base quadrata) definito da tre vettori.

Interpretiamo pertanto il testo considerando il caso particolare di un parallelepipedo rettangolo dove gli angoli sono tutti retti (fig. 2). In tal caso il suo volume $\mathcal{V}$ è dato dall'espressione

$$\mathcal{V} = x^2 \cdot h \qquad x > 0 \wedge h > 0 \tag{1}$$

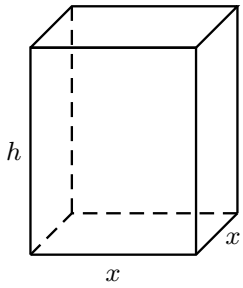


Fig. 2. Parallelepipedo rettangolo a base quadrata e sue dimensioni.

mentre l'area totale risulta

$$\mathcal{A} = 2x^2 + 4xh. \tag{2}$$

Quest'ultima espressione contiene due variabili ma, poiché è noto $\mathcal{V}$, ricaviamo dalla (1) l'altezza h

$$h = \frac{\mathcal{V}}{x^2} \tag{3}$$

e, sostituendola in (2), otteniamo

$$\mathcal{A}(x) = 2\left(x^2 + \frac{2x\mathcal{V}}{x^2}\right) = 2\left(x^2 + \frac{2\mathcal{V}}{x}\right) \qquad x > 0. \tag{4}$$

Per determinarne il minimo calcoliamo la derivata di questa funzione

$$\mathcal{A}'(x) = 2\left(2x - \frac{2\mathcal{V}}{x^2}\right) = 4\left(\frac{x^3 - \mathcal{V}}{x^2}\right) \qquad x > 0. \tag{5}$$

È quindi

$$\mathcal{A}'(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^3 - \mathcal{V} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq \sqrt[3]{\mathcal{V}} \tag{6}$$

ossia il minimo dell'area è raggiunto in corrispondenza di $x_m = \sqrt[3]{\mathcal{V}}$ (fig. 3).

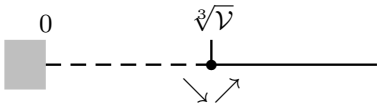


Fig. 3. Segno di $\mathcal{A}'$ e punto di minimo.

Poiché la diagonale della base quadrata è pari a $x\sqrt{2}$, calcoliamo la lunghezza della diagonale d applicando il teorema di Pitagora al triangolo in colore nella figura 4

$$d(x) = \sqrt{\left(x\sqrt{2}\right)^2 + h^2}$$

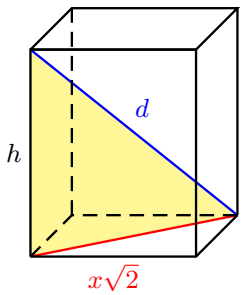


Fig. 4. Elementi che concorrono alla diagonale del parallelepipedo.

dalla quale sostituendo la (3) otteniamo

$$d(x) = \sqrt{2x^2 + \frac{\mathcal{V}^2}{x^4}} \qquad x > 0. \tag{7}$$

La sua derivata fornisce l'espressione

$$d'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x^2 + \left(\mathcal{V}^2/x^4\right)}} \cdot \left(4x - \frac{4\mathcal{V}^2}{x^5}\right)$$

il cui segno dipende dall'unico termine

$$4x - \frac{4\mathcal{V}^2}{x^5} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{4(x^6 - \mathcal{V}^2)}{x^5} \geq 0.$$

Pertanto

$$d'(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^6 - \mathcal{V}^2 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^3 \geq \mathcal{V}$$

dalla quale otteniamo $x \geq \sqrt[3]{\mathcal{V}}$ che coincide con la (6).
La risposta è quindi affermativa: sia l'area totale che la diagonale raggiungono entrambe il valore minimo in corrispondenza di una lunghezza del lato di base pari a $x_m = \sqrt[3]{\mathcal{V}}$.

Quesito n. 5: soluzione. (testo del quesito)

Data la curva di equazione

$$y = \sqrt{25 - x^2} \tag{1}$$

dev'essere innanzitutto soddisfatta la condizione $25 - x^2 \geq 0$ evidentemente risolta dall'insieme $-5 \leq x \leq 5$, intervallo che definisce pure il dominio della funzione in quanto per ogni $x \in [-5, 5]$ l'equazione restituisce uno ed un solo valore di $y \geq 0$.
Comunque, nell'ipotesi che siano soddisfatte le condizioni

$$-5 \leq x \leq 5 \ \wedge \ y \geq 0$$

possiamo riscrivere l'equazione (1) anche come

$$y^2 = 25 - x^2 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + y^2 = 25 \tag{2}$$

e quindi, riconosciuta l'equazione canonica di una circonferenza di centro l'origine $O(0, 0)$ e raggio $r = 5$, concludere che la curva proposta risulta essere la semicirconferenza γ di centro O e raggio $r = 5$ appartenente al primo e secondo quadrante del sistema cartesiano Oxy (fig. 1).

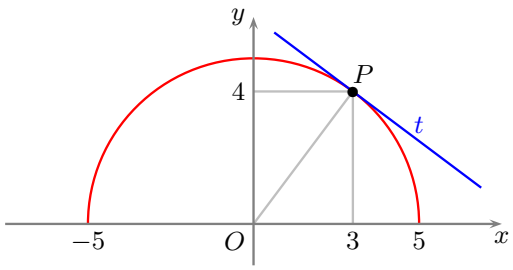


Fig. 1. Semicirconferenza γ e retta tangente in P.

Detto $P(3, \sqrt{25 - 3^2}) \equiv (3, 4)$ il punto di tangenza della retta tangente t a γ, determiniamo dapprima l'equazione di t sfruttando le nozioni di geometria analitica. Poiché t è perpendicolare al raggio OP (fig. 1), il suo coefficiente angolare m_t è legato al coefficiente angolare della retta OP dalla relazione

$$m_t = -\frac{1}{m_{OP}}. \tag{3}$$

D'altra parte, dalla geometria analitica,

$$m_{OP} = \frac{y_P - y_O}{x_P - x_O} = \frac{4}{3}, \tag{4}$$

per cui in base a (3) e (4), la retta cercata è

$$t\colon y - y_P = m_t(x - x_P) \quad \Longrightarrow \quad y - 4 = -\frac{1}{(4/3)}(x - 3)$$

e quindi

$$t\colon y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}. \tag{5}$$

Come già notato l'equazione assegnata è rappresentativa di una funzione reale di variabile reale derivabile in tutti i punti dell'intervallo aperto $]-5,5[$. Sulla base di nozioni tipiche dell'analisi, la sua derivata in $]-5,5[$ è

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}. \tag{6}$$

Il calcolo di questa nel punto di ascissa $x = 3$ fornisce direttamente il coefficiente angolare della retta t

$$m_t = -\frac{3}{\sqrt{25-3^2}} = -\frac{3}{4}$$

e di conseguenza pure la sua equazione

$$t\colon y - 4 = -\frac{3}{4}(x-3) \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}.$$

Quesito n. 6: soluzione. (testo del quesito)

Il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - (ax^3 + bx)}{x^3} = 1 \tag{1}$$

è manifestamente indeterminato in quanto sia la funzione al numeratore $N(x) = \operatorname{sen} x - (ax^3 + bx)$ sia quella al denominatore $D(x) = x^3$ hanno limiti nulli per $x \to 0$. D'altra parte, ciascuna di queste funzioni soddisfa alle ipotesi del teorema di De L'Hôpital e, in particolare, l'esistenza del limite del rapporto delle rispettive derivate: difatti dev'essere

$$\lim_{x\to 0} \frac{N'(x)}{D'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 3ax^2 - b}{3x^2} = 1. \tag{2}$$

Riscritto l'argomento del limite come

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{3}\left(\frac{\cos x - b}{x^2}\right) - a\right] = 1 \tag{3}$$

osserviamo come il termine $(\cos x - b)/x^2$ sia molto simile ad un limite noto. Ora se fosse $b \neq 1$ il limite di questo termine sarebbe infinito essendo $\lim_{x\to 0}(\cos x - b) = 1 - b \neq 0$. Il limite (3) non potrebbe quindi essere pari ad 1.
Diversamente con $b = 1$ il limite dello stesso si riduce ad uno noto, ossia

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = -\frac{1}{2}. \tag{4}$$

Poiché il limite della costante a è a stesso, il primo membro della (3) diviene

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{3}\left(\frac{\cos x - b}{x^2}\right) - \lim_{x\to 0} a = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - a = 1$$

dalla quale deduciamo $a = -7/6$. I valori cercati sono quindi

$$a = -\frac{7}{6} \quad \text{e} \quad b = 1.$$

Quesito n. 7: soluzione. (testo del quesito)

La funzione f definita a tratti come

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \arctan x & x < 0 \\ ax + b & x \geq 0 \end{cases}$$

ha per dominio l'insieme dei reali $\mathbb{R}$ ed è composta dalle funzioni $f_1(x) = -1 + \arctan x$ e $f_2(x) = ax + b$ entrambe derivabili nel loro rispettivo dominio $\mathbb{R}$. Lo studio sulla derivabilità di f si concentra quindi nel punto di contatto $x = 0$ dove la continuità implica che sia soddisfatto il limite

$$\lim_{x \to 0-} (-1 + \arctan x) = f(0). \tag{1}$$

Poiché $f(0) = b$ e

$$\lim_{x \to 0-} \arctan x = \arctan 0 = 0,$$

la (1) implica

$$-1 + 0 = b \quad \Longrightarrow \quad b = -1. \tag{2}$$

La f è derivabile in $x = 0$ se sono uguali e finiti i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale

$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}. \tag{3}$$

Il limite destro discende immediatamente

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{a(0+h) + b - b}{h} = \lim_{h \to 0+} (a) = a, \tag{4}$$

mentre quello sinistro è

$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{(-1 + \arctan h) - (-1)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{\arctan h}{h}. \tag{5}$$

Quest'ultimo si presenta indeterminato (caso $0/0$) per cui studiamo il limite del rapporto delle derivate del numeratore e del denominatore

$$\lim_{h \to 0-} \frac{D(\arctan h)}{D(h)} = \lim_{h \to 0-} \frac{1}{1 + h^2} = \frac{1}{1 + 0} = 1.$$

L'esistenza di quest'ultimo limite ci permette di applicare il teorema di De L'Hôpital e quindi concludere che il limite (5) è

$$\lim_{h \to 0-} \frac{\arctan h}{h} = 1$$

e ciò comporta, per (3) e il risultato (4), $a = 1$.
Seppure con minore generalità, notata la derivabilità di ciascuna funzione componente la f in $\mathbb{R}$, possiamo determinare il valore del parametro a anche imponendo la continuità della funzione derivata

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2} & x < 0 \\ a, & x \geq 0 \end{cases}$$

in $x = 0$. Il calcolo dei limiti sinistro e destro di f' fornisce in tal caso direttamente il valore di a

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{1+x^2} = \lim_{x\to 0+} (a) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{1+0} = a \quad \Longrightarrow \quad a = 1.$$

La derivata f' è quindi

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2} & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

e possiede segno positivo $f'(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Ne segue che la funzione f è monotona crescente nel suo dominio e quindi, per ogni coppia $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_2 > x_1$ è pure $f(x_2) > f(x_1)$. La condizione $f(x_1) = f(x_2)$ che costituisce una ipotesi fondamentale del teorema di Rolle determinandone l'intervallo entro il quale individuare almeno un punto dove si annulla la derivata, non può pertanto essere soddisfatta.

Quesito n. 8: soluzione. (testo del quesito)

Affinché la funzione di equazione

$$f_a(x) = x^5 - 5ax + a \tag{1}$$

di dominio $\mathbb{R}$ abbia tre zeri reali e distinti, il suo grafico Γ deve intersecare l'asse delle x in tre punti distinti. Per stabilire ciò calcoliamo la funzione derivata f'_a

$$f'_a(x) = 5x^4 - 5a = 5(x^4 - a) \tag{2}$$

e ne studiamo il segno nell'ipotesi che sia $a > 0$. Pertanto

$$f'_a(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^4 - a \geq 0$$

dalla quale, scomposto il primo membro nei fattori $(x^2 + \sqrt{a})(x^2 - \sqrt{a})$ discende

$$x^2 - \sqrt{a} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \leq -\sqrt[4]{a} \quad \veebar \quad x \geq \sqrt[4]{a} \tag{3}$$

essendo $x^2 + \sqrt{a} > 0$. Il segno di f'_a, riportato graficamente nella figura 1 mette in evidenza la presenza di un massimo di ascissa $x_M = -\sqrt[4]{a}$ e un minimo di ascissa $x_m = \sqrt[4]{a}$.

Fig. 1. Segno di $f'_a(x)$ con $a > 0$.

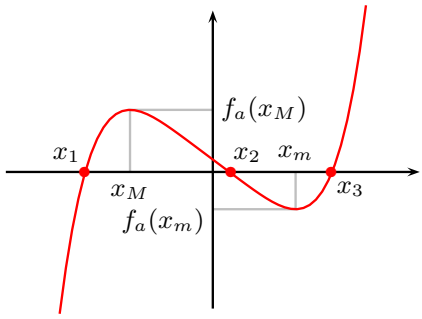


Fig. 2. Grafico Γ di f_a e intersezioni con l'asse x.

In figura 2 riportiamo un possibile grafico per la funzione f_a assieme alla disposizione che garantisce l'esistenza di tre intersezioni.
Perché ciò avvenga, l'ordinata del massimo dev'essere quindi positiva $f_a(x_M) > 0$ mentre quella del minimo negativa $f_a(x_m) < 0$.
Imponendo queste due condizioni e sostituendo in (1) le rispettive ascisse, ne deriva il sistema

$$\begin{cases} (-\sqrt[4]{a})^5 - 5a(-\sqrt[4]{a}) + a > 0 \\ (\sqrt[4]{a})^5 - 5a(\sqrt[4]{a}) + a < 0 \end{cases} \tag{4}$$

che, in quanto $(\sqrt[4]{a})^5 = a\sqrt[4]{a}$, riscriviamo come

$$\begin{cases} -a\sqrt[4]{a} + 5a\sqrt[4]{a} + a > 0 \\ a\sqrt[4]{a} - 5a\sqrt[4]{a} + a < 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a(4\sqrt[4]{a} + 1) > 0 \\ a(-4\sqrt[4]{a} + 1) < 0. \end{cases} \tag{5}$$

Poiché la prima disequazione è soddisfatta per ogni $a > 0$ il sistema è risolto se

$$-4\sqrt[4]{a} + 1 < 0 \quad \implies \quad 4\sqrt[4]{a} > 1.$$

I valori del parametro che assicurano l'esistenza di tre radici reali e distinte sono pertanto

$$\sqrt[4]{a} > \frac{1}{4} \quad \implies \quad a > \frac{1}{4^4}$$

cioè $a > 1/256$.

APPENDICE

Nelle pagine seguenti proponiamo, senza soluzioni, i testi delle prove assegnate nelle sessioni suppletiva e straordinaria dei corsi di liceo scientifico di ordinamento e opzione scienze applicate (LI02, LI03).

Indice delle prove suppletive e straordinarie

Esame 2019 sessione suppletiva 64
Esame 2019 sessione straordinaria 68
Esame 2023 sessione suppletiva 71
Esame 2023 sessione straordinaria 74

Esame 2019: sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti.

Problemi

1) Al variare di $a \in \mathbb{R}$, si consideri la famiglia di funzioni:

$$f_a(x) = \begin{cases} \dfrac{9}{2}\left(1 + xe^{a-x}\right), & \text{per } x \geq 0 \\ \dfrac{9a}{4(x-1)^4}, & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

- Discutere segno e continuità della funzione f_a al variare del parametro a. Dimostrare che, qualunque sia $a \in \mathbb{R}$, la funzione f_a ammette un punto di massimo assoluto di ascissa 1.
- Indicata con f la funzione ottenuta da f_a per $a = 2$, stabilire se f è derivabile in $x = 0$. Studiare l'andamento della funzione f specificandone gli asintoti, i punti di flesso e l'ampiezza in gradi dell'angolo formato dalle tangenti sinistra e destra nel punto di non derivabilità. Determinare i valori delle costanti positive h e k tali che, considerata la funzione
$$g(x) = h\left[1 + (3 - kx)e^{kx-1}\right]$$
si abbia $g(3 - x) = f(x)$ per $x \geq 0$.
- Con un acceleratore di particelle si prepara un fascio di protoni aventi energia cinetica pari a 42 MeV. Per indirizzare tale fascio verso un bersaglio desiderato, si utilizza un campo magnetico uniforme, ortogonale alla traiettoria dei protoni, di intensità 0,24 T. Trascurando gli effetti relativistici, descrivere il moto di ciascun protone all'interno del campo e calcolare il raggio di curvatura della traiettoria.
- Il fascio di protoni, all'uscita della zona in cui è presente $\vec{B}$, viene fatto penetrare in acqua. Si indichi con $\mathcal{E}(x)$ l'energia del protone, espressa in megaelettronvolt (MeV), dopo x centimetri (cm) di cammino in acqua e sia $\mathrm{d}\mathcal{E}$ l'energia ceduta all'acqua dal protone nel tratto $\mathrm{d}x$. Supponendo che la funzione $y = -\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}x}$ possa essere approssimata con la funzione $y = g(x)$, ponendo $h = 9/2$ e $k = 1$, calcolare l'energia $\mathcal{E}$ assorbita dall'acqua nei primi 3 centimetri di cammino del protone.

2) Due cariche elettriche puntiformi $Q_1 = q$ (con q positivo) e $Q_2 = -q$ sono collocate rispettivamente nei punti A e B, posti ad una distanza $2k$. Le cariche sono espresse in coulomb (C) e le distanze in metri (m). Si indichi con r la retta passante per i punti A e B.

- Determinare, in un punto C della retta r, l'intensità del campo elettrico generato dalle cariche Q_1 e Q_2, al variare di C su r. Esistono, su tale retta, dei punti nei quali il campo elettrico è nullo? Giustificare la risposta.
- Dimostrare che l'intensità del campo elettrico generato da Q_1 e Q_2 in un punto P posto sull'asse del segmento AB decresce quando P si allontana dal punto medio di AB.

Indicata con x la distanza di P dal punto medio di AB, esprimere l'intensità del campo elettrico in P in funzione di x.

- Fissati i parametri reali positivi h e k, studiare l'andamento della funzione

$$f(x) = \frac{h}{(x^2 + k^2)^{3/2}}$$

individuandone, in particolare, simmetrie, asintoti, estremi e punti di flesso.

- Tra le funzioni del tipo

$$g(x) = \frac{bx}{(x^2 + k^2)^a}$$

con a, $b \in \mathbb{R}$, determinare le primitive di f.
Dimostrare che, se $h = k^2$, la funzione f rappresenta la densità di probabilità di una variabile aleatoria sull'intervallo $[0; +\infty)$. Quali sono i valori della media e della mediana di tale variabile aleatoria?

Questionario

1) Fissati i numeri reali positivi a e b, con $a \geq b$, provare che

$$\lim_{x \to +\infty} \log_x \left(x^a + x^b\right) = a.$$

2) È assegnata la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \int_1^x e^{t^2} \, \mathrm{d}t.$$

Studiare il segno della funzione f e provare che essa è crescente. Determinare il valore di

$$\int_0^1 \frac{f''(x)}{f'(x)} \, \mathrm{d}x.$$

3) Dimostrare che il quadrilatero avente per vertici i punti medi dei lati di un rombo è un rettangolo.

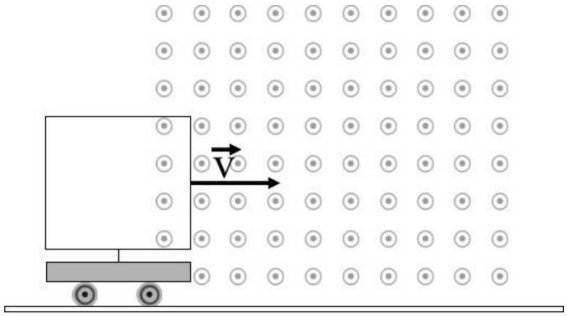
4) Considerati i punti $A(2, 3, 6)$, $B(6, 2, -3)$, $C(3, -6, 2)$ nello spazio tridimensionale, verificare che i segmenti OA, OB, OC (dove il punto O indica l'origine degli assi) costituiscono tre spigoli di un cubo. Determinare il centro e il raggio della sfera S circoscritta a tale cubo.

5) Una persona lancia simultaneamente due dadi da gioco, con facce numerate da 1 a 6, poi trascrive su un foglio il massimo dei due numeri usciti. Ripetendo molte volte la procedura, quale ci si può attendere che sarà la media dei valori trascritti?

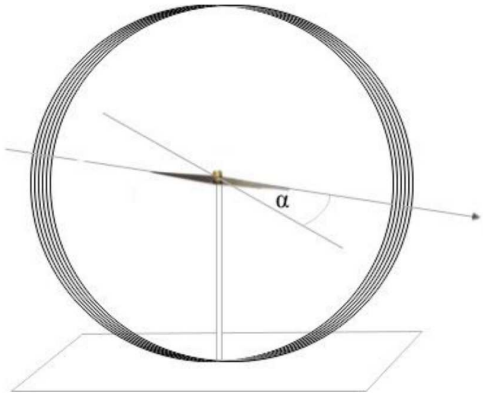
6) Consideriamo un'astronave in moto che viaggia rispetto alla terra a velocit $v = 0{,}90\,c$. Supponiamo che a bordo dell'astronave sia presente una scatola di dimensioni $a = 40\,\mathrm{cm}$, $b = 50\,\mathrm{cm}$ e $h = 20\,\mathrm{cm}$, con il lato b disposto parallelamente alla direzione del moto dell'astronave. Per un osservatore posto sulla terra, che volume avrà la scatola? Se

l'astronauta lancia la scatola con una velocità $v_s = 0{,}50\,c$ nella direzione del moto dell'astronave, quale velocità misura l'osservatore sulla terra?

7) Una bobina è costituita da N spire quadrate di lato l, ha una resistenza elettrica R ed è montata su un carrello che può muoversi con attrito trascurabile su un piano orizzontale. Il carrello viene tirato con velocità costante $\vec{v}$ ed entra in una zona in cui è presente un campo magnetico $\vec{B}$, uscente dalla pagina come in figura. Spiegare perché la bobina si riscalda e determinare l'espressione della potenza dissipata. Cosa accade se il carrello viene lanciato con velocità $\vec{v}$ verso la stessa regione?



8) Una bobina compatta è costituita da 130 spire di raggio $R = 15\,\text{cm}$.
Si pone un ago magnetico, le cui dimensioni sono trascurabili rispetto a R, al centro della bobina, come in figura.



Il piano della bobina viene orientato in modo da contenere l'ago che, a sua volta, è orientato nella direzione della componente orizzontale del campo magnetico terrestre. Quando la bobina è attraversata da corrente, l'ago devia di un angolo α. Spiegare la causa di questa deviazione.
In tabella sono riportati alcuni valori, misurati sperimentalmente, di α e della corrispondente corrente nella bobina. Utilizzando questi dati, misurare l'intensità della componente orizzontale del campo magnetico terrestre, con la relativa incertezza.

Deviazione di α	10°	20°	30°	40°	50°
Intensità di corrente	11,4 mA	23,3 mA	36,8 mA	52,4 mA	73,9 mA

COSTANTI FISICHE		
carica elementare	e	$1{,}602 \times 10^{-19}$ C
massa del protone	m_p	$1{,}673 \times 10^{-27}$ kg
permeabilità magnetica del vuoto	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2
velocità della luce nel vuoto	c	$2{,}998 \times 10^{8}$ m/s
elettronvolt	eV	$1{,}602 \times 10^{-19}$ J

Prove suppletive: indice

Esame 2019: sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti.

Problemi

1) Dato $k > 0$, si consideri la funzione $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} kx, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{k}{x^2}, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

- Dimostrare che, qualunque sia $k > 0$, la funzione f è continua ma non ovunque derivabile. Studiare l'andamento di tale funzione, specificandone il punto di massimo assoluto. Per quali valori di k le tangenti destra e sinistra nel punto di non derivabilità formano un angolo acuto γ tale che $\tan\gamma = 3$?
- Posto $k = 1$, sia r una retta di equazione $y = t$, con $0 < t < 1$. Detti S e T i punti d'intersezione tra r ed il grafico della funzione f, siano S' e T' le rispettive proiezioni ortogonali sull'asse x. Come deve essere scelto il valore di t, in modo che sia massima l'area del rettangolo $SS'T'T$?

Nel vuoto, si consideri una distribuzione sferica di carica elettrica, positiva e di raggio R, espresso in metri (m). La densità di carica, indicata con ρ ed espressa in coulomb al metro cubo ($\mathrm{C/m^3}$), è uniforme.

- Indicata con x la distanza di un punto P dal centro della sfera, provare che l'intensità del campo elettrico generato da tale distribuzione di carica è data da

$$E(x) = \begin{cases} kx, & \text{se } 0 \leq x \leq R \\ \dfrac{kR^3}{x^2}, & \text{se } x > R \end{cases}$$

  dove k è un'opportuna costante, di cui si chiede l'espressione in funzione della densità di carica ρ e la dimensione fisica.
- Sia q una carica elementare positiva collocata nel centro della sfera. Determinare l'espressione del lavoro compiuto dalla forza elettrica per portare la carica q a distanza $2R$ dal centro della sfera. Quale dovrebbe essere il lavoro compiuto dalla stessa forza elettrica per portare la carica q a distanza infinita dal centro della sfera?

2) In un laboratorio di fisica, si vuole verificare sperimentalmente che un filo rettilineo percorso da corrente, immerso in un campo magnetico uniforme, è soggetto a una forza. A questo scopo, un filo di rame RS rettilineo, rigido, di lunghezza l, misurata in metri (m), di massa m, misurata in chilogrammi (kg), viene appeso alle estremità di due fili conduttori. Tali fili, verticali e di massa trascurabile, sono liberi di ruotare, senza attrito, intorno a due ganci metallici, P e Q, posizionati alle altre estremità. Attraverso un interruttore, i ganci P e Q vengono collegati a un generatore di corrente continua e il filo di rame viene posto in un campo magnetico $\vec{B}$, uniforme e costante, perpendicolare al filo

(fig. 1) e la cui intensità è misurata in tesla (T). Quando si chiude l'interruttore, il circuito è percorso da una corrente di intensità i, misurata in ampère (A) e il filo RS si sposta in una nuova posizione di equilibrio, in cui PR forma un angolo θ con la direzione verticale (fig. 2).

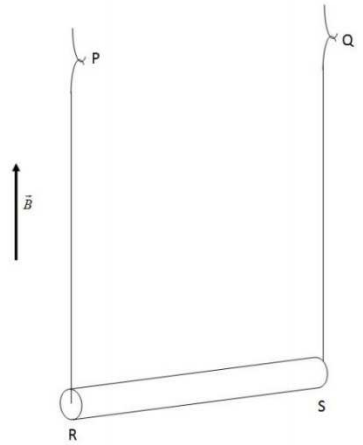


Fig.1

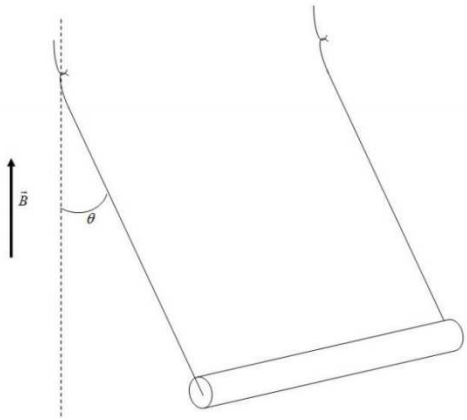


Fig.2

- Descrivere in direzione, verso e intensità, la forza con cui il campo $\vec{B}$ agisce sulla corrente che attraversa il tratto RS. Come varia la posizione di equilibrio del filo di rame al variare dell'intensità e del verso della corrente?
- Rappresentare tutte le forze agenti sul filo RS. Considerando costanti $\vec{B}$, la massa m e la lunghezza l del filo RS, verificare che l'ampiezza dell'angolo θ in funzione dell'intensità di corrente i è data da $\theta(i) = \arctan\left(\dfrac{Bl}{mg} \cdot i\right)$, in cui g è l'accelerazione di gravità.
- Posto $\theta(x) = \arctan(kx)$, si considerino, in un sistema cartesiano Oxy, le funzioni $y = \theta(x)$ e la sua inversa $y = \theta^{-1}(x)$. Determinare il valore di $k > 0$, affinché i grafici delle suddette funzioni siano tangenti nell'origine. Successivamente, determinare i valori di k in corrispondenza dei quali le rette tangenti ai grafici delle due funzioni formano un angolo di 30° nell'origine.
- Posto $k = 1$, determinare l'equazione della funzione $F(x)$, primitiva di $\theta(x)$ e passante per l'origine del sistema di riferimento. Tracciare il grafico della funzione $y = \theta(x)$ e da esso dedurre il grafico di $y = F(x)$.

Questionario

1) Determinare il valore di questo limite: $\lim_{x \to 0} (1 - \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$.

2) Data la funzione $f(x) = x \operatorname{sen} x$ e fissato un numero $k > 0$, provare che il valore di

$$\int_0^{x_0} k \cdot f(kx)\,\mathrm{d}x$$

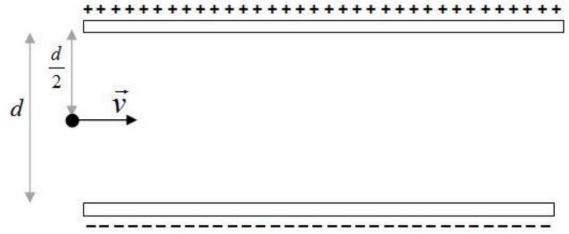
(dove x_0 indica il minimo numero reale positivo per cui $f(kx_0) = 0$) non dipende dalla scelta di k.

3) Dato un triangolo ABC, sia M il punto medio del lato BC. Dimostrare che, se la lunghezza di AM è la metà di BC, allora ABC è un triangolo rettangolo.

4) Dopo aver verificato che il punto $T(1,0,1)$ appartiene al piano $\pi\colon x - 2y + 2z = 3$, determinare l'equazione della superficie sferica passante per il punto $P(1,0,5)$ e tangente in T al piano π.

5) Da un mazzo di 40 carte da gioco, vengono estratte 6 carte contemporaneamente.
- Qual è la probabilità che nessuna delle carte estratte sia rossa?
- Qual è la probabilità che, tra le carte estratte, vi siano esattamente 2 assi?

6) Un condensatore piano, costituito da due armature quadrate di lato $l = 4{,}0\,\text{cm}$, distanti $d = 3{,}0\,\text{cm}$, è soggetto a una d.d.p. $\Delta V = 15\,\text{V}$. Un elettrone vi entra perpendicolarmente al campo elettrico, come in figura, con una velocità $v_0 = 2{,}5 \times 10^6\,\text{m/s}$. A quale distanza dall'ingresso del condensatore deve essere posto uno schermo, affinché la deflessione verticale totale sia 20 cm?



7) Un protone viene sparato su una particella α (due protoni e due neutroni) da una distanza di 10 cm (considerare le particelle puntiformi), alla velocità $v_0 = 5{,}00 \times 10^3\,\text{m/s}$. Calcolare la distanza di massimo avvicinamento.

8) Un elettrone entra in una regione di spazio, sede di un campo magnetico di intensità $B = 0{,}20\,\text{T}$, con velocità di modulo $v_0 = 1{,}5 \times 10^4\,\text{m/s}$, che forma un angolo di $10°$ con la direzione di $\vec{B}$. Determinare modulo, direzione e verso del campo elettrico necessario affinché l'elettrone non subisca deflessione.

COSTANTI FISICHE		
carica elementare	e	$1{,}602 \times 10^{-19}\,\text{C}$
massa dell'elettrone	m_e	$9{,}109 \times 10^{-31}\,\text{kg}$
massa del protone	m_p	$1{,}673 \times 10^{-27}\,\text{kg}$
massa particella alfa	m_α	$6{,}645 \times 10^{-27}\,\text{kg}$
costante dielettrica del vuoto	ϵ_0	$8{,}854 \times 10^{-12}\,\text{F/m}$
permeabilità magnetica del vuoto	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}\,\text{H/m}$

Prove suppletive: indice

Esame 2023: sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

Problemi

1) Assegnata la funzione

$$f(x) = ax\ln(x) - \frac{3}{2}x$$

a) determinare il valore del parametro reale a in modo che f abbia un punto di minimo assoluto in $x = \sqrt{e}$. Si studi la funzione ottenuta e se ne disegni il grafico.

Si ponga, d'ora in avanti, $a = 1$.

b) Si verifichi che esiste una sola retta tangente t alla curva di equazione $y = f(x)$, condotta dal punto $Q(0, -1)$. Determinare l'equazione di t e le coordinate del corrispondente punto di tangenza.

c) Determinare i parametri reali h, k in modo che le curve di equazioni

$$y = f(x) \quad \text{e} \quad y = \frac{x+h}{x+k}$$

risultino tangenti nel loro punto comune di ascissa 1.

d) Studiare la funzione

$$g(x) = \int_1^x f(t)\mathrm{d}t$$

dopo averne scritta l'espressione analitica. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di g nel suo punto di ascissa $x = e$.

2) Sono assegnate due funzioni polinomiali $y = P(x)$ e $y = Q(x) = kP(x)$, con k parametro reale, i cui grafici rappresentativi sono mostrati in figura in fondo al problema.
È noto che:

- $P''(x) = 12x^2 - 24x$
- hanno entrambe nell'origine degli assi un flesso a tangente orizzontale
- il valore massimo assunto dalla funzione Q è uguale a $\frac{27}{4}$.

a) Determinare l'espressione analitica delle funzioni $P(x)$ e $Q(x)$.

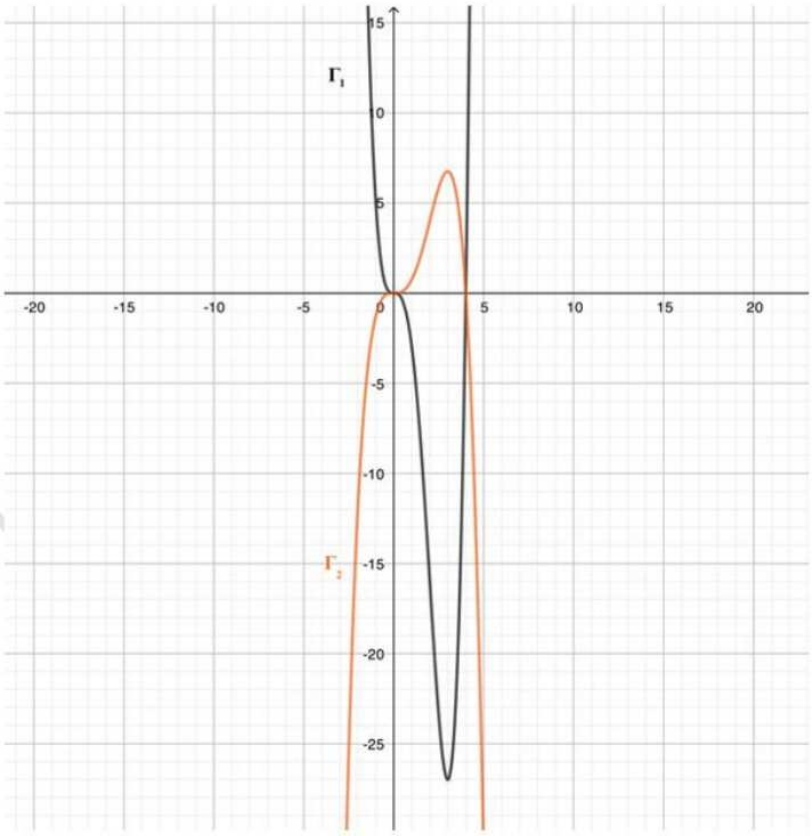
b) Determinare dominio, zeri, segno, estremi e flessi delle funzioni

$$y = P(x) \cdot Q(x) \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{P(x)}$$

D'ora in avanti, si assuma che $P(x) = x^4 - 4x^3$.

c) Calcolare l'area della regione R delimitata dal grafico della funzione P e dall'asse delle ascisse.

d) Verificare che, per $x > 4$, la funzione $F(x) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x-4}{x}\right)$ è una primitiva di $\frac{x^2}{P(x)}$. Esprimere, in funzione di t, con $t \geq 5$, l'integrale $\int_5^t \frac{x^2}{P(x)}\,\mathrm{d}x$ e calcolarne il limite per $t \to +\infty$ fornendo un'interpretazione geometrica del risultato ottenuto.



Quesiti

1) Dato un triangolo ABC, sia P un punto del lato BC e siano G' e G'' i baricentri dei triangoli ABP e ACP. Dimostrare che il segmento $G'G''$ è parallelo a BC.

2) Un dado regolare a 6 facce viene lanciato 8 volte. Qual è la probabilità di ottenere tre volte la faccia "5"? Qual è la probabilità di ottenere la faccia "5" per la terza volta all'ottavo lancio?

3) Determinare le equazioni delle superfici sferiche di raggio $r = 5\sqrt{2}$ tangenti nel punto $P(-1, 2, 3)$ al piano di equazione $3x + 4y - 5z + 10 = 0$.

4) Una sfera, di raggio r fissato, è inscritta nel cono S di volume minimo. Qual è la distanza del vertice del cono dalla superficie della sfera?

5) Determinare il valore del parametro reale k in modo che la retta di equazione cartesiana $y = x - 2$ risulti tangente alla curva $y = x^3 + kx$.

6) Scrivere una funzione polinomiale $y = p(x)$ di terzo grado che si annulli solo per $x = 0$ e per $x = 3$, il cui grafico sia tangente all'asse x in un punto e passi per $P(1, -4)$. Determinare l'area della regione piana limitata compresa tra l'asse x ed il grafico della funzione polinomiale individuata.

7) Calcolare

$$\lim_{x \to 1} \frac{\int_1^x (t^2 - 1) \cdot e^{2t} \mathrm{d}t}{(x-1)^2}$$

8) Sia f una funzione reale di variabile reale continua e derivabile in un intervallo (a, b). Si considerino le seguenti affermazioni A: "f ha un punto di massimo o di minimo locale in $x_0 \in (a, b)$" e B: "$\exists\, x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$". Stabilire quali fra le seguenti affermazioni sono vere per ogni f funzione continua e derivabile in un intervallo (a, b).

1. $A \implies B$
2. $B \implies A$
3. $A \iff B$
4. $B \iff A$

Motivare opportunamente la risposta facendo riferimento a teoremi o controesempi.

Prove suppletive: indice

Esame 2023: sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

Problemi

1) Si consideri la famiglia di funzioni $f_n(x) = 2 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{x^n}$ con $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$.

a) Verificare che tutte le curve rappresentate dalle funzioni della famiglia $f_n(x)$ passano per uno stesso punto e scrivere le sue coordinate. Determinare, in funzione del parametro n, le ascisse degli estremi e dei flessi e calcolarne il limite, con $n \to \infty$. Scrivere le equazioni degli asintoti e tracciare i grafici delle funzioni f_n, evidenziando le differenze tra i casi in cui n è pari da quelli in cui n è dispari.

b) Si assuma $n = 3$, studiare la funzione $f_3(x)$ e si tracci un suo grafico rappresentativo, dimostrando che ammette un unico zero di segno negativo. Discutere, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione $f_3(x) = k$.

c) Si consideri la funzione $g(x) = 2 - \dfrac{3}{x}$ e verificare che, $\forall x > 0$, vale la disuguaglianza $f_n(x) > g(x)$, indipendentemente dal valore di n. Si consideri l'integrale

$$I(t) = \int_1^t (f_n(x) - g(x))\,\mathrm{d}x,$$

che esprime l'area della regione delimitata dai grafici delle funzioni f_n e g e dalle rette di equazioni $x = 1$ e $x = t$, $t > 1$. Si calcolino $I(t)$ e il $\lim\limits_{t\to+\infty} I(t)$, fornendo un'interpretazione geometrica del risultato ottenuto.

d) Calcolare il $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f_n(x) - 2}{g(x) - 2}$ e verificare che il risultato non dipende da $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

2) Si considerino le famiglie di funzioni $f_a(x) = \frac{1}{2}(e^{ax} - e^{-ax})$ e $g_a(x) = \frac{1}{2}(e^{ax} + e^{-ax})$ con a parametro reale positivo.

a) Si traccino, al variare del parametro, i grafici rappresentativi γ_f e γ_g delle funzioni $f_a(x)$ e $g_a(x)$ evidenziando simmetrie, estremi e flessi.

b) Siano P e Q due punti, rispettivamente su γ_f e γ_g, aventi la stessa ascissa positiva, P' e Q' le loro proiezioni sull'asse delle ordinate. Si individui il valore del parametro a in corrispondenza del quale la massima area del rettangolo $PQQ'P'$ vale e^{-1}.

D'ora in avanti, si assuma $a = 1$.

c) Verificare l'identità $g^2(x) - f^2(x) = 1$ e determinare il numero intero per cui $50 \leq g(x) - f(x) \leq 100$. Specificare quale, tra $f(x)$ e $g(x)$, è una funzione invertibile in $\mathbb{R}$ e ricavare l'espressione analitica della funzione inversa.

d) Determinare l'equazione $y = P(x)$ della parabola γ avente il vertice nel punto di minimo assoluto della funzione $g(x)$ e retta tangente, per $x = 1$, parallela alla retta di equazione $2x + y = 0$. Calcolare l'area della regione finita R delimitata da γ, dal grafico di $g(x)$ e dalle rette di equazione $x = \pm 1$. Verificare che l'area R può

essere approssimata con quella del triangolo isoscele inscritto nel segmento parabolico delimitato da γ e dall'asse delle ascisse.

Quesiti

1) Nel triangolo ABC, l'ampiezza di uno dei tre angoli è la metà di un secondo angolo del triangolo ed è pari al triplo del terzo angolo. Detti A', B', C' i punti di tangenza tra i lati di ABC ed il suo cerchio inscritto, determinare le ampiezze degli angoli del triangolo $A'B'C'$.

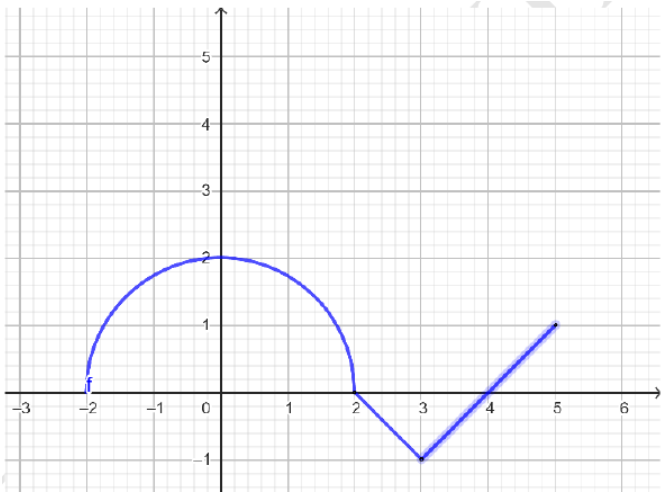
2) Una classe è formata da 18 studenti; durante la lezione di musica, vengono creati (in modo completamente casuale) tre gruppi formati rispettivamente da 5, 6 e 7 studenti. Se Alice, Barbara e Chiara sono tre studentesse della classe, determinare la probabilità che solo due di loro facciano parte di uno stesso gruppo.

3) Assegnate le rette r: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 + 4t, \end{cases}$ s: $\begin{cases} x = 1 \\ 2y - z = 3 \end{cases}$ con t parametro reale, determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente r e parallelo a s.

4) Tra tutti i parallelepipedi rettangoli a base quadrata di diagonale fissata d, dimostrare che il cubo è quello di volume massimo.

5) Determina l'equazione della funzione dispari che ha un solo flesso a tangente orizzontale e la cui derivata seconda è $f'' = -10x^3 + 12x$.

6) Si consideri la funzione $F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ con $x \in [-2; 5]$, dove f è la funzione rappresentata in figura, ottenuta dall'unione di una semicirconferenza e due segmenti.
Calcolare $F(-2)$, $F(2)$, $F(3)$ e $F(5)$.



7) Determinare il dominio della funzione $f(x) = \dfrac{x|x+1|}{x^3 - x}$ e stabilire la tipologia delle sue discontinuità.

8) Si considerino le seguenti affermazioni sulla funzione $y = f(x)$.
A: "$f(x)$ è derivabile per $x = x_0$"

(continua)

B: "$f(x)$ è continua per $x = x_0$"
Indicare quali, tra le seguenti affermazioni, non costituisce un teorema. Spiegare la scelta effettuata anche attraverso opportuni controesempi.
$A \implies B$ (se A allora B)
$B \implies A$ (se B allora A)
$A \iff B$ (B se e solo se A).

Prove suppletive: indice