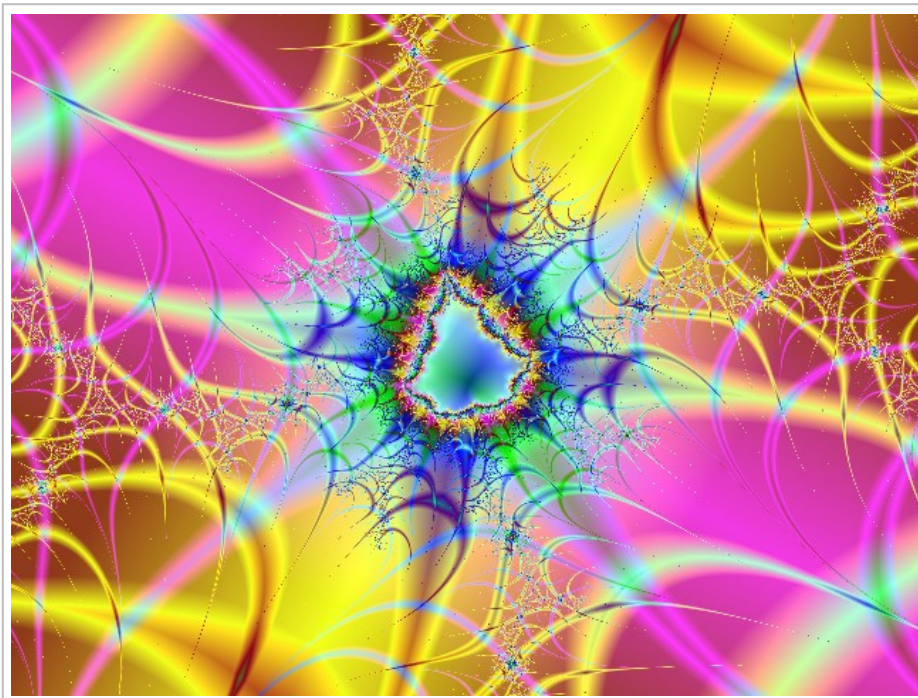


# Applicazioni fisiche dell'integrazione definita



**LORENZO ROI**

---

Edizioni H-ALPHA

© Edizioni H-ALPHA. Aprile 2007. 

L'immagine frattale di copertina rappresenta un particolare dell'insieme di Mandelbrot centrato nel punto  $(-0.174599416533217, 1.07161296145946)$  e ingrandito 783.6 volte.

Titolo: *Tracce frattali.*

# Indice

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 1.1 | Calcolo del potenziale elettrico di una carica puntiforme . . . . .   | 2  |
| 1.2 | Lavoro di carica di un condensatore ed energia immagazzinata . . .    | 4  |
| 1.3 | Scarica e carica di condensatori . . . . .                            | 5  |
| 1.4 | Correnti di apertura e chiusura . . . . .                             | 9  |
| 1.5 | Energia intrinseca della corrente attraverso una induttanza . . . . . | 12 |
| 1.6 | Valori efficaci delle correnti alternate . . . . .                    | 13 |
| 1.7 | Potenza assorbita e formula di Galileo–Ferraris . . . . .             | 14 |

# Applicazioni fisiche dell'integrazione definita

In questa dispensa vengono presentate alcune semplici applicazioni fisiche dell'integrazione definita, inizialmente sulla deduzione del potenziale elettrico di una carica puntiforme e quindi nell'ambito dei circuiti elettrici. La trattazione richiede la conoscenza delle tecniche di integrazione delle più semplici equazioni differenziali a variabili separabili.

## 1.1 Calcolo del potenziale elettrico di una carica puntiforme

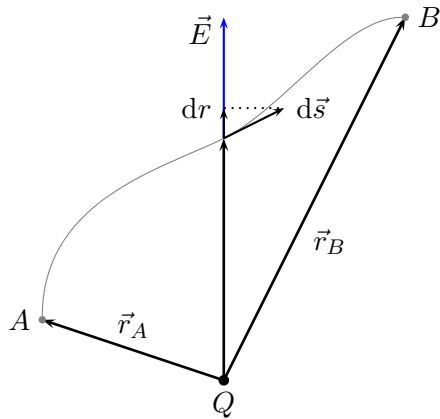


Figura 1.1:

punto dove si trova la carica  $q$ . Il lavoro totale è perciò espresso dall'integrale

$$L_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

Allo scopo di ottenere l'espressione del potenziale elettrico generato da una carica puntiforme  $Q$ , calcoliamo il lavoro della forza elettrica necessario per portare una carica  $q$ , lungo un determinato percorso, dalla posizione iniziale individuata dal vettore  $\mathbf{r}_A$  alla posizione finale  $\mathbf{r}_B$  (fig. 1.1).

La forza di Coulomb agente tra le due cariche è

$$\mathbf{F} = k \frac{qQ}{r^2} \mathbf{u}$$

con  $\mathbf{u}$  versore uscente dalla carica sorgente  $Q$  e diretto radialmente verso il

ossia è la somma dei lavori fatti nei tratti infinitesimi  $ds$ ,  $dl = \mathbf{F} \times ds$ , eseguita su tutto il percorso da  $A$  a  $B$ . Ne segue

$$L_{AB} = \int_A^B k \frac{qQ}{r^2} \mathbf{u} \times ds = kqQ \int_A^B \frac{\mathbf{u} \times ds}{r^2}.$$

Per la definizione di prodotto scalare, il termine  $\mathbf{u} \times ds$  esprime la componente dello spostamento  $ds$  lungo la direzione del campo (o del versore radiale) per cui si può identificare con lo spostamento radiale subito dalla carica  $q$ . Questo verrà indicato dal differenziale  $dr$  (fig. 1.2).

Il lavoro  $L_{AB}$  diventa

$$\begin{aligned} L_{AB} &= kqQ \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = kqQ \left[ -\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} \\ &= kqQ \left[ -\frac{1}{r_B} - \left( -\frac{1}{r_A} \right) \right] = \frac{kqQ}{r_A} - \frac{kqQ}{r_B} \\ &= - \left[ \frac{kqQ}{r_B} - \frac{kqQ}{r_A} \right]. \end{aligned}$$

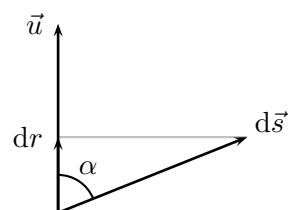


Figura 1.2:

Come si vede il lavoro della forza elettrica  $L_{AB}$  *non dipende dal percorso* che collega  $A$  con  $B$  ma solo dalle distanze  $r_A$  e  $r_B$  oltreché dal prodotto  $kqQ$ . Si pone pertanto

$$U_P = \frac{kqQ}{r_P} + c,$$

e tale grandezza, detta *energia potenziale* della carica  $q$  nel campo di  $Q$ , risulta una funzione della posizione della carica  $q$  e di  $q$  stessa.

Volendo poi eliminare la dipendenza da  $q$  si definisce il *potenziale elettrico del punto  $P$*  il rapporto

$$V_P = \frac{U_P}{q}.$$

In termini di quest'ultima grandezza fisica, il lavoro si potrà esprimere come

$$\begin{aligned} L_{AB} &= -(U_B - U_A) = -(qV_B - qV_A) \\ &= -q(V_B - V_A) = q(V_A - V_B) \end{aligned}$$

mentre il potenziale elettrico generato da una carica puntiforme  $Q$  risulta

$$V_P = \frac{U_P}{q} = \left( k \frac{qQ}{r} + c \right) \cdot \frac{1}{q} = k \frac{Q}{r} + c.$$

In alternativa a tale approccio si può partire anche dalla relazione differenziale

$$E = -\frac{dV}{dx}$$

che lega il modulo del campo elettrico  $E$  alla derivata del potenziale fatta rispetto la variabile spaziale  $x$ . Nel nostro caso, poiché il modulo  $E$  dipende solo da  $r$  (unica coordinata spaziale) risulta

$$E = -\frac{dV}{dr} \implies dV = -E dr = -k \frac{Q}{r^2} dr$$

per cui, integrando entrambi i membri,

$$\int_A^B dV = \int_A^B -k \frac{Q}{r^2} dr$$

da cui il risultato atteso

$$V_{AB} = -kQ \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr = -kQ \left[ -\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A} \right] = k \frac{Q}{r_B} - k \frac{Q}{r_A}.$$

## 1.2 Lavoro di carica di un condensatore ed energia immagazzinata

Calcoliamo l'energia elettrostatica posseduta da un condensatore carico ossia anche il lavoro elettrico necessario per disporre le cariche sulle sue armature. Supponiamo che il condensatore sia inizialmente scarico e di caricarlo trasportando gradualmente della carica, per esempio positiva, su un'armatura. Nell'istante generico  $t$  un'armatura avrà quindi carica  $+q(t)$  e l'altra, messa a terra,  $-q(t)$ . Il lavoro necessario per trasportare la carica infinitesima  $dq$  è dato da

$$dL = V \cdot dq$$

dove il potenziale  $V$  è legato alla carica (istantanea) presente sulle armature e alla capacità dalla  $C = q(t)/V(t)$  che riscriviamo più sinteticamente come  $V = q/C$ . Il lavoro totale si ottiene integrando

$$\begin{aligned} \int_0^L dL &= \int_0^Q V \cdot dq \\ &= \int_0^Q \frac{q dq}{C} \end{aligned}$$

dove gli estremi di integrazione dell'integrale a secondo membro variano dalla carica nulla iniziale alla carica finale  $Q$  presente sulle armature.

È immediato ottenere

$$L = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{1}{C} \left[ \frac{q^2}{2} \right]_0^Q = \frac{Q^2}{2C}$$

risultato che, definita la d.d.p.  $V_0$  finale tra le armature, può assumere per la legge della capacità elettrica

$$\frac{Q}{V_0} = C \quad \Longrightarrow \quad Q = CV_0,$$

la forma

$$L = \frac{1}{2}(C^2V_0^2) \cdot \frac{1}{C} = \frac{1}{2}CV_0^2.$$

Come detto inizialmente, questa relazione esprime pure l'energia immagazzinata nel condensatore. Per esempio, se il condensatore è piano con le armature di area  $A$  disposte a distanza  $d$ , allora  $C = \epsilon \frac{A}{d}$  e tale energia si riscrive come

$$E_{tot} = \frac{1}{2} \epsilon \frac{A}{d} \cdot V^2.$$

Sapendo che il campo elettrico (uniforme) è legato al potenziale da  $V = Ed$ , dalla precedente discende

$$E_{tot} = \frac{1}{2} \epsilon \frac{A}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \epsilon E^2 (A \cdot d).$$

Poiché  $A \cdot d$  è il volume della regione spaziale dove il campo  $E$  non è nullo (trascuriamo gli effetti di bordo) si può definire una *densità volumica di energia elettrostatica* rapportando l'energia totale con il volume, ottenendo

$$w_E = \frac{E_{tot}}{Ad} = \frac{1}{2} \epsilon E^2.$$

Tale risultato, pur dedotto sulla base di una situazione fisica semplice permette di evidenziare un aspetto effettivamente generale: là dove è definito un campo elettrico, esiste sempre una densità spaziale di energia proporzionale al quadrato del modulo del campo.

### 1.3 Scarica e carica di condensatori

Nel circuito di figura 1.3 il condensatore di capacità  $C$  è carico ad una differenza di potenziale  $V_0$ .

Nell'istante iniziale  $t = 0$  si chiude l'interruttore  $S$  e le armature vengono quindi connesse ad una resistenza  $R$ . In tal modo l'isolamento tra le armature non è più completo e quindi le cariche possono fluire, attraverso il resistore, da un'armatura all'altra, dando origine ad una corrente elettrica. Convenzionalmente, si assume che cariche positive passino dall'armatura positiva (a potenziale maggiore) a quella negativa.

Nell'istante generico  $t$  la d.d.p. ai capi del condensatore è legata alla corrente che attraversa  $R$  dalla legge di Ohm, ossia

$$V(t) = Ri(t);$$

per la legge della capacità e per definizione di corrente è anche

$$V(t) = \frac{q(t)}{C} \quad \text{e} \quad i(t) = -\frac{dq(t)}{dt}$$

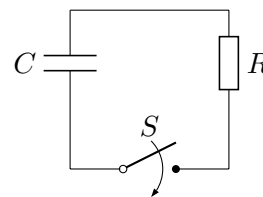


Figura 1.3:

dove il segno meno davanti alla derivata della carica è necessario in quanto, mentre la corrente viene rappresentata da un valore positivo, la carica possiede in questa situazione derivata negativa visto che sta diminuendo nel tempo. Allora

$$V(t) = Ri(t) \implies \frac{q(t)}{C} = -R \frac{dq}{dt} \quad \text{ossia} \quad \frac{q}{C} = -R \frac{dq}{dt}.$$

Separando ciascuna delle variabili carica e tempo in membri diversi

$$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} dt$$

si può passare all'integrazione tra l'istante iniziale nullo e quello finale  $t$

$$\int_{Q_0}^Q \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt$$

ottenendo

$$\ln Q - \ln Q_0 = -\frac{1}{RC}(t - 0) \implies \ln\left(\frac{Q}{Q_0}\right) = -\frac{1}{RC} \cdot t.$$

Prendendo l'esponenziale di entrambi i membri si giunge alla

$$\frac{Q}{Q_0} = e^{-t/RC} \quad \text{e quindi} \quad Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}.$$

La funzione  $Q(t)$  è rappresentata nella figura 1.4.



Sfruttando la legge della capacità e posto  $Q_0 = CV_0$ , la dipendenza temporale del potenziale risulta

$$V(t) = \frac{Q(t)}{C} = V_0 e^{-t/RC},$$

mentre quella della corrente si ottiene eseguendo la derivazione

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}.$$

Appare quindi evidente come tutte e tre le grandezze, carica  $Q(t)$ , potenziale  $V(t)$  e corrente  $I(t)$ , seguano il medesimo andamento cioè una decrescita esponenziale a partire dal valore iniziale.

È facile verificare che la quantità  $\tau = RC$  ha le *dimensioni fisiche di un tempo* ed è detta *costante di tempo del circuito*; essa rappresenta il tempo caratteristico della scarica. Difatti dopo un intervallo di tempo pari a  $\tau$  (si ponga  $t = \tau$ ), la grandezza in esame si è ridotta di un fattore  $\frac{1}{e} \approx 0.3679$ . La scarica quindi è tanto più lenta o rapida quanto maggiore o minore è il termine  $\tau = RC$ .

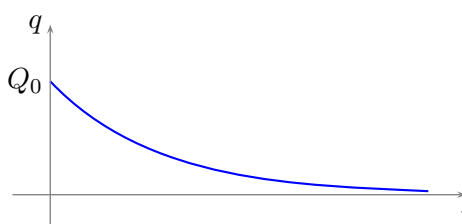


Figura 1.4:

### Carica

Nel circuito di figura 1.5 il condensatore è inizialmente scarico. Alla chiusura nell'istante  $t = 0$  dell'interruttore  $S$  il generatore fa affluire cariche sulle armature del condensatore, ai cui capi compare una d.d.p. Applicando la II legge di Kirchhoff all'unica maglia esistente discende

$$V_0 = R \cdot i(t) + \frac{q(t)}{C}$$

dove

$$\frac{q(t)}{C} = V(t)$$

rappresenta la differenza di potenziale ai capi del condensatore. Poiché ora la carica cresce nel tempo, risulta

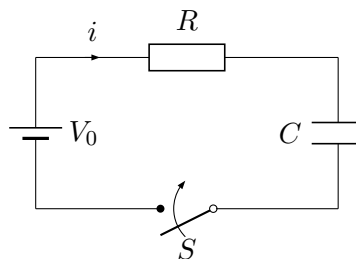


Figura 1.5:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

per cui

$$V_0 = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \implies R \frac{dq}{dt} = V_0 - \frac{q}{C}$$

e quindi

$$R \frac{dq}{dt} = \frac{V_0 C - q}{C}.$$

Separando le variabili si ottiene

$$\frac{dq}{V_0 C - q} = \frac{dt}{RC}$$

da cui, moltiplicando per  $-1$

$$\frac{dq}{q - V_0 C} = -\frac{1}{RC} dt.$$

Possiamo ora passare all'integrazione tra l'istante iniziale  $t = 0$  quando la carica sulle armature è nulla e quello finale  $t$  quando vale  $Q(t)$

$$\int_0^{Q(t)} \frac{dq}{q - V_0 C} = \int_0^t -\frac{1}{RC} dt :$$

ricordando che

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln |b| - \ln |a| = \ln \left| \frac{b}{a} \right|$$

abbiamo

$$\ln \left| \frac{Q(t) - V_0 C}{-V_0 C} \right| = -\frac{t}{RC} \implies \frac{Q(t) - V_0 C}{-V_0 C} = e^{-t/RC}$$

e moltiplicando per il termine costante al denominatore  $-V_0 C$

$$Q(t) - V_0 C = -V_0 C e^{-t/RC} \implies Q(t) = V_0 C [1 - e^{-t/RC}].$$

Posto  $V_0 C = Q_0$ , con  $Q_0$  carica presente sul condensatore quando la d.d.p. ai suoi capi è  $V_0$ , giungiamo infine alla

$$Q(t) = Q_0 (1 - e^{-t/RC})$$

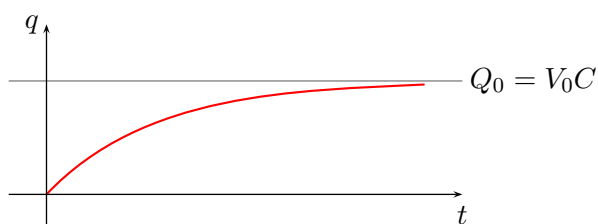


Figura 1.6:

che rappresenta la funzione incognita che si voleva ottenere ossia l'andamento della carica al variare del tempo  $t$ . La sua rappresentazione grafica è data in figura 1.6 e mostra una crescita asintotica della carica, tendente per  $t \rightarrow +\infty$  al valore  $Q_0 = V_0 C$ .

La d.d.p. ai capi del condensatore (la si ottiene dividendo per la capacità  $C$ ) segue una legge analoga

$$V(t) = V_0(1 - e^{-t/RC})$$

mentre la corrente è descritta dalla

$$I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC},$$

che mette in evidenza come  $I$  tenda esponenzialmente ad annullarsi  $I \rightarrow 0$ , quando  $t \rightarrow +\infty$ . Ancora, la costante di tempo  $\tau = RC$  fornisce una stima immediata della rapidità di crescita o decrescita di tali grandezze.

## 1.4 Correnti di apertura e chiusura

Nel circuito di figura 1.7 comprendente in aggiunta al generatore di tensione, due resistenze e una induttanza, all'istante  $t = 0$  l'interruttore  $S$  viene chiuso nella posizione  $A$ .

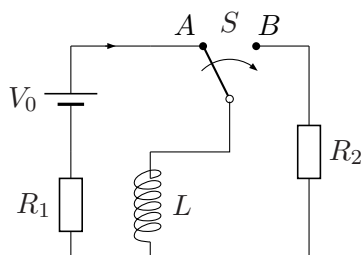


Figura: 1.7

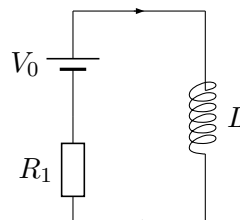


Figura: 1.8

In tal modo si esclude dal circuito la resistenza  $R_2$  e il circuito diviene pertanto equivalente a quello della figura 1.8, dove rimane la sola resistenza  $R_1$ . La presenza di tale resistenza sta a significare che un simile elemento viene sempre coinvolto in un processo di carica–scarica in quanto qualsiasi circuito è costituito da conduttori. Applicando la legge di Ohm (o di Kirchhoff) all'intero circuito si ha

$$V_0 - L \frac{di}{dt} = R_1 \cdot i \quad \text{o anche} \quad V_0 = L \frac{di}{dt} + R_1 \cdot i. \quad (1.1)$$

In quest'ultima espressione la f.e.m. indotta ai capi dell'induttore appare come una caduta di potenziale dello stesso segno di quella ohmica. Difatti per la legge di Lenz, il generatore tende a portare l'intensità di corrente a un certo valore mentre la f.e.m. indotta si oppone alla variazione. Risolvendo la 1.1 con il metodo della separazione delle variabili

$$\begin{aligned} -L \frac{di}{dt} &= R_1 i - V_0 & \implies & \frac{di}{R_1 i - V_0} = -\frac{dt}{L} \\ \int_0^I \frac{di}{R_1 i - V_0} &= -\frac{1}{L} \int_0^t dt & \implies & \frac{1}{R_1} \int_0^I \frac{R_1 di}{R_1 i - V_0} = -\frac{t}{L} \\ \frac{1}{R_1} \ln \left( \frac{R_1 I - V_0}{R_1 \cdot 0 - V_0} \right) &= -\frac{t}{L} & \implies & \frac{R_1 I - V_0}{-V_0} = e^{-(R_1 t)/L} \end{aligned}$$

e, finalmente,

$$R_1 I - V_0 = -V_0 e^{-(R_1 t)/L} \quad R_1 I = V_0 \left[ 1 - e^{-(R_1 t)/L} \right]$$

$$I = \frac{V_0}{R_1} \left[ 1 - e^{-\frac{t}{(L/R_1)}} \right].$$

Tale funzione esprime la dipendenza della corrente in funzione del tempo e possiede l'andamento di figura 1.9.

Sussiste quindi una convergenza asintotica della corrente in quanto questa appare convergere al valore  $V_0/R_1$  per  $t \rightarrow +\infty$  e ciò in coerenza con la legge di Ohm. Difatti questo valore non è altro che l'intensità della corrente che si avrebbe se fosse  $L = 0$ . La presenza perciò di una induttanza impedisce sostanzialmente una variazione istantanea della corrente ostacolando lo stabilirsi del regime permanente che comunque, in pratica, viene raggiunto dopo un periodo pari a  $3 \approx 5$  costanti di tempo  $\tau = L/R$ .

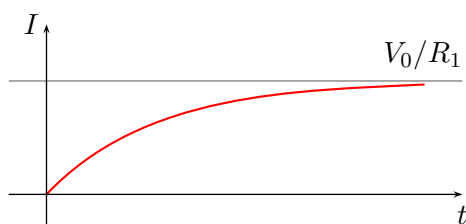


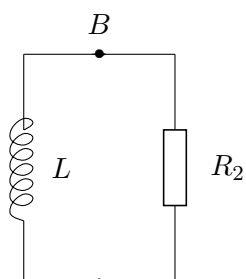
Figura 1.9:

Quando si chiude l'interruttore nella posizione  $B$  (fig. 1.7) il circuito diviene il seguente (fig. 1.10), dove l'induttore  $L$  è ora "carico".

L'equazione del circuito diviene quindi

$$L \frac{di}{dt} + R_2 i = 0$$

in quanto non vi sono generatori di d.d.p. e le condizioni iniziali sono  $t = 0, i = I_0$  ( $I_0 = V_0/R_1$  se si considera la situazione asintotica precedente). Separando ancora una volta le variabili discende



$$L \frac{di}{dt} = -R_2 i$$

$$\frac{di}{i} = -\frac{R_2}{L} dt$$

$$\int_{I_0}^I \frac{di}{i} = -\frac{R_2}{L} \int_0^t dt \quad \ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -\frac{R_2}{L} t$$

$$\frac{I}{I_0} = e^{-(R_2 t)/L}$$

$$I = I_0 e^{-(R_2 t)/L}$$

Figura 1.10:

L'intensità di corrente decresce ora esponenzialmente con costante di tempo  $\tau = L/R_2$  (vedi fig. 1.11).

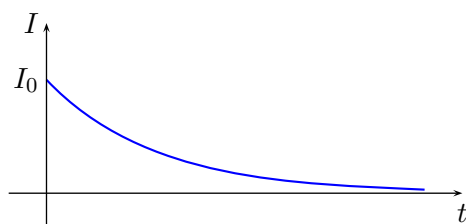


Figura 1.11:

## 1.5 Energia intrinseca della corrente attraverso una induttanza

Consideriamo un circuito percorso dalla corrente stazionaria  $I$  e determiniamo quale sia la sua energia associata ossia quale sia stato il lavoro elettrico necessario per portare la corrente dal valore iniziale nullo a quello finale  $I$ . Il circuito possiede una induttanza non nulla,  $L$ , e una resistenza  $R$ . Considerato il generatore di d.d.p.  $V_0$  il circuito è schematizzabile come in figura 1.12.

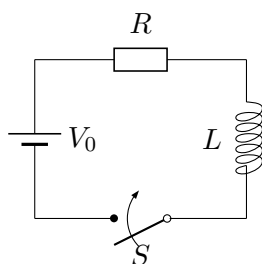


Figura 1.12:

Sappiamo che con l'interruttore chiuso e in condizioni di regime (si veda la sezione precedente sulle correnti di chiusura), il generatore fornisce una corrente di intensità  $I = V_0/R$  coerente con la legge di Ohm e la presenza dell'induttanza sarebbe irrilevante. Per calcolare l'energia del sistema in queste condizioni conviene partire dalla situazione di interruttore aperto e calcolare il lavoro fatto dal generatore per giungere alla situazione stazionaria. Poiché ai capi dell'induttanza si presenta la f.e.m.  $V = -L(di/dt)$ , per vincerla il generatore dovrà spendere una potenza pari a

$$P = -V \cdot i = Li \frac{di}{dt}.$$

Poiché il lavoro elettrico  $dW$  è legato alla potenza da

$$P = \frac{dW}{dt}$$

ne discende  $dW = L \cdot i \cdot di$  ossia

$$\int_0^W dW = \int_0^I Lidi$$

$$W = L \int_0^I idi \quad \implies \quad W = \frac{1}{2} LI^2.$$

Questa energia prende il nome di *energia intrinseca della corrente*.

Se l'induttanza è costituita da un solenoide di sezione  $A$  e lunghezza  $l$  allora è anche

$$L = \mu \frac{N^2}{l} \cdot A$$

per cui l'energia intrinseca diviene

$$W = \frac{1}{2} \mu A \frac{N^2}{l} I^2 = \frac{1}{2} \left( \mu^2 \frac{N^2}{l^2} I^2 \right) A \left( \frac{l}{\mu} \right).$$

Sapendo che il campo magnetico  $B$  in un solenoide è legato alla corrente dalla

$$B = \mu \frac{N}{l} I$$

discende che  $W$  si può riscrivere come

$$W = \frac{1}{2} B^2 \frac{Al}{\mu}.$$

Dato che  $Al$  è il volume entro il quale è presente il campo  $B$ , è possibile in analogia a quanto **fatto** per il campo elettrico, definire la densità volumica di energia

$$\frac{W}{Al} = w_B = \frac{1}{2\mu} B^2.$$

Ancora una volta, pur partendo da un caso particolare, siamo giunti ad un risultato di validità generale: la densità spaziale di energia è nel caso di campi magnetici proporzionale al modulo quadro del campo  $B$ .

## 1.6 Valori efficaci delle correnti alternate

Supponiamo una corrente alternata del tipo  $I(t) = I_0 \sin \omega t$  e si vuole calcolare il suo valore medio nel tempo. Poiché la funzione che la esprime è periodica è sufficiente determinare il valore medio in un intervallo di tempo pari al suo periodo. Allora ricordando il teorema del valor medio integrale si ha

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \frac{1}{T} \int_0^T I(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T I_0 \sin \omega t dt \\ &= \frac{I_0}{T} \int_0^T \sin \omega t = \frac{I_0}{T\omega} \int_0^T \sin \omega t \cdot \omega dt = \frac{I_0}{\omega T} [-\cos \omega t]_0^T \\ &= \frac{I_0}{\omega T} [(-\cos \omega T) + \cos 0] = \frac{I_0}{\omega T} (1 - \cos \omega T). \end{aligned}$$

Poiché  $T = 2\pi/\omega$ ,  $\omega T = 2\pi$  e

$$\bar{I} = \frac{I_0}{2\pi} (1 - 1) = 0.$$

Il valor medio della corrente è pertanto nullo come d'altra parte potevamo aspettarci essendo  $I$  alternata.

Volendo invece determinare il valor medio della corrente al quadrato (sappiamo che questo diventa importante, per esempio, nella dissipazione per effetto Joule dell'energia fornita) la procedura è la seguente:

$$\begin{aligned}
 \bar{I}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T (I_0 \sin \omega t)^2 dt = \frac{I_0^2}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{I_0^2}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt \\
 &= \frac{I_0^2}{T} \left[ \int_0^T \frac{1}{2} dt - \frac{1}{2} \int_0^T \cos 2\omega t dt \right] = \frac{I_0^2}{T} \left[ \frac{T}{2} - \frac{1}{4\omega} \int_0^T (\cos 2\omega t + \phi) 2\omega dt \right] \\
 &= \frac{I_0^2}{T} \left[ \frac{T}{2} - \frac{1}{4\omega} (\sin 2\omega t)_0^T \right] = \frac{I_0^2}{2} - \frac{I_0^2}{4\omega T} (\sin 2\omega T - \sin 0) \\
 &= \frac{I_0^2}{2} - \frac{I_0^2}{4\omega T} (\sin 4\pi - 0) = \frac{I_0^2}{2}.
 \end{aligned}$$

Il valor medio trovato permette la definizione del valore efficace della corrente. In particolare  $\bar{I}^2$  lo si pone uguale al quadrato del valore efficace

$$I_{eff}^2 = \bar{I}^2 = \frac{I_0^2}{2}.$$

Pertanto il valore efficace di una corrente (ma anche di qualsiasi altra grandezza fisica variabile in modo sinusoidale nel tempo) è

$$I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}.$$

## 1.7 Potenza assorbita e formula di Galileo–Ferraris

La potenza assorbita da un circuito percorso dalla corrente  $I = I_0 \sin(\omega t + \phi)$  e alimentato da un generatore con d.d.p.  $V = V_0 \sin \omega t$  è data da

$$P(t) = V \cdot I = V_0 \sin \omega t \cdot I_0 \sin(\omega t + \phi).$$

Il suo valor medio è pertanto

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T V_0 I_0 \sin \omega t \sin(\omega t + \phi) dt = \frac{V_0 I_0}{T} \int_0^T \sin \omega t \sin(\omega t + \phi) dt.$$

Per le formule goniometriche di Werner vale l'identità  $\sin \omega t \sin(\omega t + \phi) = \cos \phi - \cos(2\omega t + \phi)$  per cui l'integrale precedente si riscrive

$$\bar{P} = \frac{V_0 I_0}{T} \int_0^T \frac{1}{2} [\cos \phi - \cos(2\omega t + \phi)] dt$$

per cui



$$\begin{aligned}
\bar{P} &= \frac{V_0 I_0}{2T} \int_0^T \cos \phi dt - \frac{V_0 I_0}{2T} \int_0^T \cos(2\omega t + \phi) dt \\
&= \frac{V_0 I_0}{2T} [\cos \phi \cdot T] - \frac{V_0 I_0}{2T} \cdot \frac{1}{2\omega} \int_0^T \cos(2\omega t + \phi) 2\omega dt \\
&= \frac{V_0 I_0}{2} \cos \phi - \frac{V_0 I_0}{4\omega T} [\sin(2\omega t + \phi)]_0^T \\
&= \frac{V_0 I_0}{2} \cos \phi - \frac{V_0 I_0}{4\omega T} [\sin(2\omega T + \phi) - \sin \phi]
\end{aligned}$$

Essendo comunque  $\sin(2\omega T + \phi) - \sin \phi = \sin(4\pi + \phi) - \sin \phi = 0$  si giunge alla

$$P = \frac{V_0 I_0}{2} \cos \phi$$

espressione che si può riscrivere in termini dei valori efficaci

$$\bar{P} = I_{eff} V_{eff} \cdot \cos \phi.$$

e che costituisce la formula di Galileo–Ferraris.