

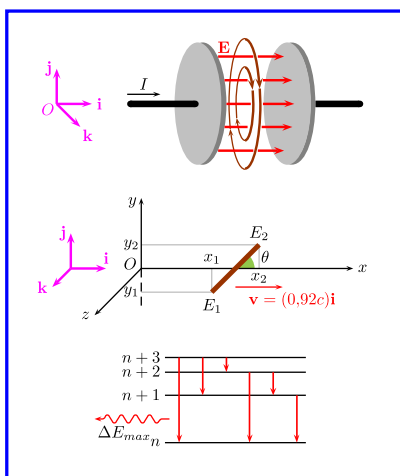
Problemi di Fisica

Correnti alternate e circuiti oscillanti

Equazioni di Maxwell e onde e.m.

Relatività Ristretta

Introduzione alla fisica moderna

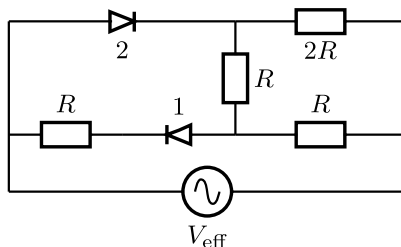


Vol. 3/3

LORENZO ROI

Problema 1.11

Un diodo è un elemento di circuito che permette il passaggio di corrente solo nel verso indicato dalla freccia nel simbolo che lo rappresenta. Nel circuito di [figura](#) alimentato da un generatore AC di valore efficace V_{eff} sono presenti quattro resistori con le resistenze indicate e due diodi. Determinare la potenza media erogata al circuito.



Soluzione. In un circuito AC la corrente inverte periodicamente il suo verso: per mezzo periodo, per es. $[0, T/2]$, avrà un verso che supponiamo positivo, per l'altro mezzo periodo, $[T/2, T]$, sarà negativo. Il circuito proposto rientra tra i circuiti resistivi in quanto vi compaiono solo resistori per cui è nulla la differenza di fase tra la tensione e la corrente. Ciò permette di associare univocamente la polarità del generatore al verso della corrente per cui, se supponiamo che il generatore nell'intervallo $[0, T/2]$ abbia la polarità di figura 1, nello stesso intervallo la corrente dovrà avere nei vari rami del circuito i versi riportati: in particolare il diodo 2 (in grigio in fig. 1) non potrà essere percorso dalla corrente.

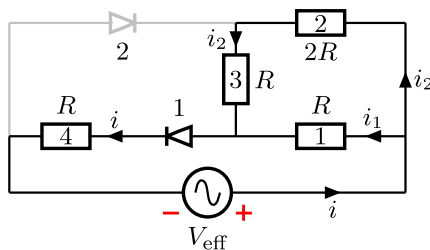


Fig. 1. Correnti e loro versi in $[0, T/2]$.

Indicati con un indice numerico i resistori e osservate le correnti che li attraversano, la resistenza equivalente del circuito è data dalla combinazione

$$\begin{aligned} R_{eq,1} &= \text{serie}[4, \text{parallelo}[1, \text{serie}[2, 3]]] \\ &= R + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R + 2R} \right)^{-1} = \frac{7R}{4}, \end{aligned} \quad (1)$$

per cui la potenza media fornita (e dissipata) nell'intervallo $[0, T/2]$ è

$$\overline{P_1} = \frac{1}{2} (R_{eq,1} I_{\text{eff},1}^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{V_{\text{eff}}^2}{R_{eq,1}} \right) = \frac{4V_{\text{eff}}^2}{14R}, \quad (2)$$

dove abbiamo eliminato la corrente efficace $I_{\text{eff},1}$ con l'equazione che la lega alla tensione efficace del generatore $I_{\text{eff},1} = V_{\text{eff}}/R_{eq,1}$. Il fattore $1/2$ si giustifica invece per il fatto che tale relazione vale in un semiperiodo.

Nel successivo semiperiodo $[T/2, T]$, le polarità del generatore sono invertite per cui la corrente erogata si inverte e il circuito diventa equivalente a quello di figura 2 dove, a causa della disposizione del diodo, non scorre corrente nel resistore 4.

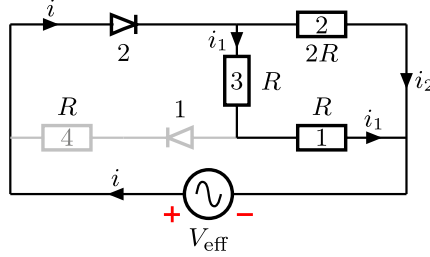


Fig. 2. Correnti e loro versi in $[T/2, T]$.

La resistenza equivalente è in questo secondo caso rappresentata dalla combinazione

$$R_{eq,2} = \text{parallelo}[2, \text{serie}[1, 3]] = \left(\frac{1}{2R} + \frac{1}{R + R} \right)^{-1} = R \quad (3)$$

dalla quale segue la potenza media impegnata

$$\overline{P}_2 = \frac{1}{2} (R_{eq,2} I_{\text{eff},2}^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{V_{\text{eff}}^2}{R_{eq,2}} \right) = \frac{V_{\text{eff}}^2}{2R} \quad (4)$$

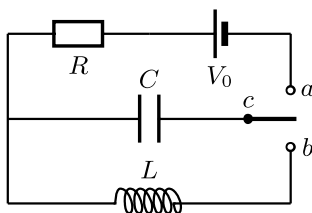
avendo utilizzata ancora la relazione $V_{\text{eff}} = R_{eq,2} I_{\text{eff},2}$ assieme al fattore $1/2$.

La potenza complessiva $\overline{P}$ erogata è quindi espressa dalla somma delle potenze (2) e (4) fornite in ciascun semiperiodo e risulta

$$\overline{P} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2 = \frac{4V_{\text{eff}}^2}{14R} + \frac{V_{\text{eff}}^2}{2R} = \frac{11V_{\text{eff}}^2}{14R}.$$

Problema 1.16

Nel circuito di figura si ha $R = 20\ \Omega$, $C = 7,1\ \mu\text{F}$ e $L = 50\ \text{mH}$, con una batteria di f.e.m. $V_0 = 35\ \text{V}$. Il deviatore c è rimasto nella posizione a per lungo tempo. In un certo istante viene spostato in b . a) calcolare la frequenza della corrente alternata che ne consegue. b) Qual è l'ampiezza delle oscillazioni di corrente?



Soluzione. Con il deviatore nella posizione a la batteria gradualmente carica il condensatore attraverso il resistore R con costante di tempo $\tau = RC = 14,2\ \text{ms}$ mentre l'induttore L in questa fase risulta escluso. Dopo un sufficiente intervallo di tempo (approssimativamente pari o maggiore a 4 o 5 volte τ) la condizione asintotica di corrente nulla e condensatore carico si può considerare raggiunta. In tale situazione la d.d.p. ai capi del condensatore è V_0 per cui la carica sull'armatura positiva è

$$Q_0 = CV_0 = 2,49 \times 10^{-4}\ \text{C}. \quad (1)$$

Posto il deviatore nella posizione b l'equazione del circuito diviene, per le leggi di Kirchhoff,

$$-L \frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0 \quad (2)$$

e, sapendo che $i = dq/dt$ si può riscrivere come

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\left(\frac{1}{LC}\right)q \quad (3)$$

dove al primo membro compare la derivata seconda della funzione incognita $q(t)$ rappresentativa della carica. Posto

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}, \quad (4)$$

l'equazione differenziale nella forma

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\omega^2q \quad (5)$$

rientra nelle omogenee di secondo grado ed è del tutto analoga a quella che descrive il moto oscillatorio armonico di un grave soggetto ad una forza variabile di tipo elastico con pulsazione ω . Come discusso nel precedente problema 1.15 la sua soluzione generale può assumere la forma compatta

$$q(t) = Q_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (6)$$

con Q_0 e ϕ costanti da determinare in base alle condizioni iniziali che, nel nostro caso, possiamo identificare come $q(0) = Q_0$ e $\phi = 0$.

Pertanto il circuito LC in questione è sede di oscillazioni elettriche che, per l'assenza di elementi dissipativi, conservano l'energia totale somma della componente elettrica e magnetica (si veda il problema 1.15).

La frequenza f di tali oscillazioni discende dalla (4) e dalla relazione tra pulsazione e frequenza $\omega = 2\pi f$,

$$(2\pi f)^2 = \frac{1}{LC} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 267 \text{ Hz}$$

mentre l'ampiezza I_0 delle oscillazioni della corrente si ottiene derivando la (6)

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \omega Q_0 \cos(\omega t)$$

per cui l'ampiezza è, con (1),

$$I_0 = \omega Q_0 = (2\pi f)(CV_0) = 0,417 \text{ A.}$$

Problema 2.3

Un condensatore a facce piane e parallele, separate da una piccola distanza e di forma circolare con raggio $R = 5$ cm viene scaricato da una corrente $I = 2$ A. Determinare la direzione, verso e modulo del campo magnetico internamente al condensatore:

a) in un punto che dista $r_1 = 3$ cm dall'asse delle armature e b) in un punto esterno a queste con distanza dall'asse pari a $r_2 = 7$ cm.

Soluzione. L'unica differenza esistente tra questo problema e il precedente 2.1 consiste nel verso della corrente che, in questo caso, scarica l'armatura di sinistra, evidentemente positiva dato il verso del campo elettrico (fig. 1). Manteniamo inoltre inalterate le scelte circa la terna destrorsa e la posizione della sua origine.

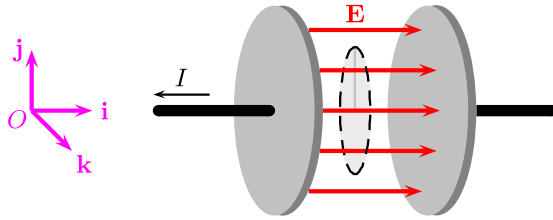


Fig. 1. Condensatore piano, corrente di scarica e campo $\mathbf{E}$.

a) Scelta quindi la circonferenza interna di raggio r_1 (fig. 2) lungo la quale calcolare la circuitazione del campo magnetico e percorsa nel verso orario (il medesimo del problema 2.1), ricordata la costanza del modulo del campo $\mathbf{B}$ per la simmetria della configurazione, il calcolo della circuitazione fornisce l'espressione

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = (2\pi r_1)B \quad (1)$$

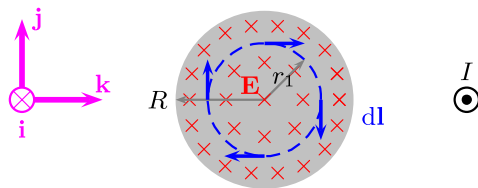


Fig. 2. Circuitazione di $\mathbf{B}$ in punti interni al condensatore.

dove il segno di B , ancora incognito, andrà definito dal calcolo del secondo membro nella legge di Ampère-Maxwell

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi(\mathbf{E})}{dt}. \quad (2)$$

Il calcolo del flusso del campo elettrico $\Phi(\mathbf{E})$ attraverso l'area $\mathbf{A}_1$ delimitata dal contorno scelto è ancora

$$\Phi(\mathbf{E}) = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{E} = (\pi r_1^2 \mathbf{i}) \cdot (E \mathbf{i}) = (\pi r_1^2 E) \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \pi r_1^2 E \quad (3)$$

ed essendo in un condensatore piano il suo modulo è legato alla densità di carica $\sigma(t)$

$$E = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0}, \quad (4)$$

definita, a sua volta, dalla

$$\sigma(t) = \frac{q(t)}{A} = \frac{q(t)}{\pi R^2} \quad (5)$$

dove $A = \pi R^2$ è l'area delle armature. Giungiamo quindi ad esprimere E come

$$E = \frac{q(t)}{\epsilon_0 \pi R^2} \quad (6)$$

a cui associamo per la (3) il flusso

$$\Phi(\mathbf{E}) = \frac{\pi r_1^2 q(t)}{\epsilon_0 \pi R^2} = \left(\frac{r_1^2}{\epsilon_0 R^2} \right) q(t). \quad (7)$$

La legge di Ampère-Maxwell (2) con i risultati (1) e (7) diviene

$$(2\pi r_1)B = \mu_0 \epsilon_0 \left(\frac{r_1^2}{\epsilon_0 R^2} \right) \frac{dq}{dt} \implies B = \left(\frac{\mu_0 r_1}{2\pi R^2} \right) \frac{dq}{dt} \quad (8)$$

dove si è considerato che la sola grandezza dipendente dal tempo è la carica $q(t)$. Poiché il condensatore si sta scaricando la derivata della carica ha segno negativo per cui, diversamente da quanto posto nella (11) del problema 2.1, qui dobbiamo porre

$$\frac{dq}{dt} = -I$$

e quindi il campo risultante possiede segno negativo

$$B = - \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \right) r_1 \quad 0 \leq r_1 \leq R. \quad (9)$$

Le linee di campo sono quindi delle circonferenze con centro sull'asse del condensatore e giacenti su piani perpendicolari ad esso: se osservate dall'origine O e nella direzione del versore $\mathbf{i}$ hanno verso antiorario (fig. 3).

Numericamente $B = -4,8 \times 10^{-6} \text{ T}$.

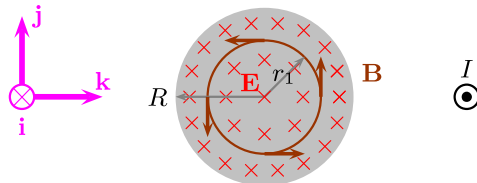


Fig. 3. Linea di campo $\mathbf{B}$ in punti interni al condensatore.

b) Nel caso il percorso lungo il quale calcolare la circuitazione di $\mathbf{B}$ sia una circonferenza di raggio $r_2 > R$ (figg. 4 e 5) rimangono valide le considerazioni di simmetria sul campo magnetico per cui il primo membro della legge di Ampère-Maxwell risulta ancora

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint B d\mathbf{l} = B \oint d\mathbf{l} = (2\pi r_2)B. \quad (10)$$

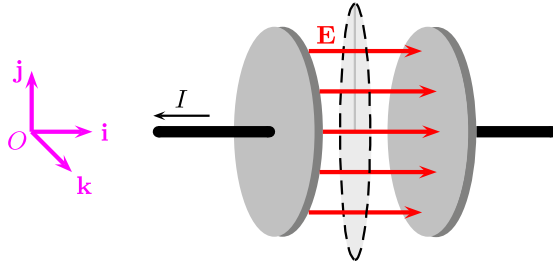


Fig. 4. Condensatore e circuitazione con $r_2 > R$.

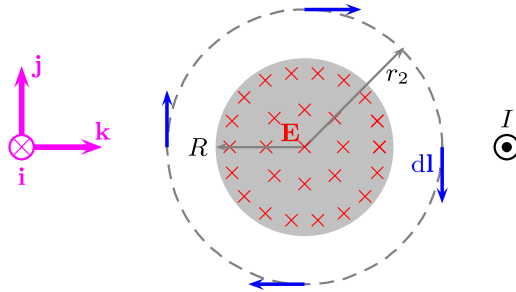


Fig. 5. Circuitazione di $\mathbf{B}$ in punti esterni al condensatore.

Nell'ipotesi che il campo elettrico sia sostanzialmente nullo all'esterno delle armature il flusso di $\mathbf{E}$ dipende solo dall'area A delle armature per cui

$$\Phi(\mathbf{E}) = \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{E} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = (\pi R^2 \mathbf{i}) \cdot (E \mathbf{i}) = (\pi R^2 E) \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \pi R^2 E. \quad (11)$$

Ripresa l'espressione (6) del campo elettrico e inserita nella precedente otteniamo che

$$\Phi(\mathbf{E}) = \pi R^2 \cdot \left(\frac{q(t)}{\epsilon_0 \pi R^2} \right) = \frac{q(t)}{\epsilon_0} \quad (12)$$

e di conseguenza la legge di Ampère-Maxwell assume la forma

$$(2\pi r_2)B = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi(\mathbf{E})}{dt} \implies (2\pi r_2)B = \mu_0 \epsilon_0 \left(\frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{dt} \right)$$

da cui

$$B = \left(\frac{\mu_0}{2\pi r_2} \right) \frac{dq}{dt}. \quad (13)$$

Pure in questo caso il segno di B dipende dalla derivata della carica per cui essendo il condensatore in fase di scarica risulta

$$\frac{dq}{dt} < 0.$$

Di conseguenza, poiché la corrente di scarica è riportata dal testo come numero positivo, dobbiamo porre

$$\frac{dq}{dt} = -I$$

da cui

$$B = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} \quad r_2 > R. \quad (14)$$

In figura 6 rappresentiamo una linea di campo magnetico evidenziando il suo verso antiorario come visto dall'origine O e nella direzione di $\mathbf{i}$, mentre l'analoga di fig. 5 del problema 2.1 è riportata, per la scarica del condensatore, nella successiva figura 7. Numericamente troviamo $B_2 = -5,714 \times 10^{-6}$ T.

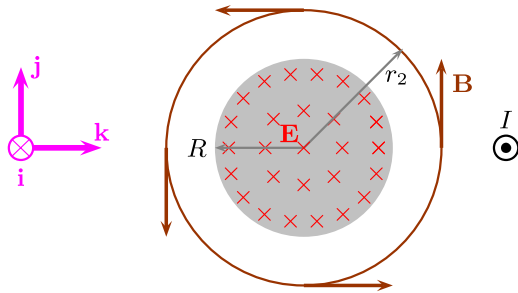


Fig. 6. Linea di campo $\mathbf{B}$ in punti esterni al condensatore.

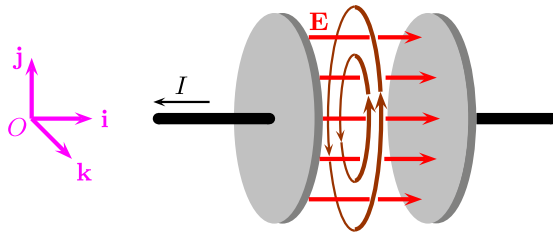


Fig. 7. Scarica del condensatore e linee di campo.

Problema 2.16 A

Un'onda elettromagnetica piana possiede una lunghezza d'onda $\lambda = 6 \text{ cm}$ e si propaga lungo l'asse y di un sistema cartesiano $Oxyz$. Il campo elettrico ha un valore massimo $E_0 = 200 \text{ V/m}$ ed oscilla nel piano xy . a) Calcolare i valori delle grandezze f , B_0 , k e ω riportando quindi i campi alla loro forma vettoriale. b) Rappresentare il vettore di Poynting e, ottenuto il verso di propagazione, calcolare il suo valore medio. c) Quale pressione di radiazione l'onda esercita su una superficie perfettamente riflettente perpendicolare alla direzione y ? d) Quale accelerazione acquista una lamina rettangolare di massa $m = 200 \text{ g}$ perfettamente riflettente e normale a y avente le dimensioni $l_1 = 1 \text{ m}$ e $l_2 = 0,5 \text{ m}$?

Soluzione. a) Il calcolo delle grandezze richieste si ottiene a partire dalle relazioni

$$\lambda f = c, \quad E_0 = c B_0, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = 2\pi f,$$

e fornisce i valori

$$\begin{aligned} f &= \frac{c}{\lambda} = 5 \text{ GHz}, & B_0 &= E_0/c = 6,67 \times 10^{-7} \text{ T}, \\ k &= 104,7 \text{ m}^{-1}, & \omega &= 3,14 \times 10^{10} \text{ rad/s}. \end{aligned} \quad (1)$$

Per esprimere i campi elettrico $\mathbf{E}$ e magnetico $\mathbf{B}$ in un sistema cartesiano definito dalla terna destrorsa di versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ poniamo l'origine O in un punto dove questi campi nell'istante t rappresentato in figura 1 sono nulli.

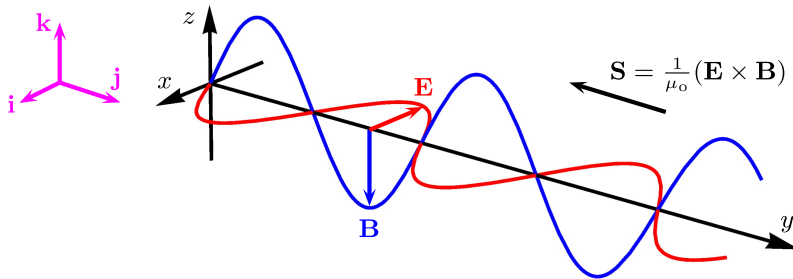


Fig. 1. Onda elettromagnetica regressiva e verso di propagazione.

Il campo elettrico oscilla nel piano xy e si propaga lungo y : è rappresentato dalla funzione

$$\mathbf{E} = E_0 \sin(ky \pm \omega t)\mathbf{i}, \quad (2)$$

mentre il campo magnetico viene descritto dalla

$$\mathbf{B} = B_0 \sin(ky \pm \omega t)\mathbf{k} \quad (3)$$

in quanto il suo piano di oscillazione coincide con yz . Il segno $\pm$ della componente temporale nella fase di entrambi sta ad indicare che non sappiamo ancora se quest'onda sia progressiva o regressiva.

b) Per conoscere il verso di propagazione calcoliamo il vettore di Poynting sulla base di (2) e (3):

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{\mu_0}[E_0 \sin(ky \pm \omega t)\mathbf{i}] \times [B_0 \sin(ky \pm \omega t)\mathbf{k}] \\ &= \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \sin^2(ky \pm \omega t)(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) \\ &= -\frac{E_0 B_0}{\mu_0} \sin^2(ky \pm \omega t)\mathbf{j} = S(y, t)\mathbf{j},\end{aligned}\quad (4)$$

e, in quanto $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$, la componente $S(y, t)$ di tale vettore risulta negativa. Il verso della propagazione avviene quindi nel verso negativo dell'asse y per cui l'onda risulta regressiva e tale fatto giustifica una fase della funzione seno riportata come $ky + \omega t$.

Il valor medio $\bar{S}$ del modulo di $\mathbf{S}$ discende dal calcolo del valor medio della funzione $\sin^2(ky + \omega t)$ nella (4) e che si traduce nel noto integrale

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(ky + \omega t) dt = \frac{1}{2} \quad (5)$$

per cui risulta

$$\bar{S} = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0} \quad (6)$$

mentre vettorialmente è $\bar{\mathbf{S}} = -\bar{S}\mathbf{j}$. Sfruttando la relazione che lega i campi e relative ampiezze già utilizzata in (1) e il legame tra la costante dielettrica e la permeabilità del vuoto $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$, la precedente assume pure le forme equivalenti

$$\bar{S} = \frac{E_0^2}{2c\mu_0} = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_0^2 = \frac{c B_0^2}{2\mu_0} = 53,1 \text{ W/m}^2. \quad (7)$$

Inoltre sappiamo che questo valore medio $\bar{S}$ coincide con l'intensità I dell'onda per cui $\bar{S} = I$ (problema 2.5, relazione (19)).

c) Poiché la superficie perpendicolare all'asse y è perfettamente riflettente, la pressione di radiazione p_r su di essa è doppia della pressione agente nel caso di completo assorbimento. Pertanto, ripresa la (8) del problema 2.11, è

$$p_r = \frac{2I}{c}$$

e sfruttando il valor medio del vettore di Poynting (7) otteniamo

$$p_r = \frac{2I}{c} = \frac{2\bar{S}}{c} = 3,54 \times 10^{-7} \text{ Pa}. \quad (8)$$

d) A seguito di tale pressione la forza agente sulla lamina assume il valore e verso

$$\mathbf{F} = -(p_r A)\mathbf{j} \quad (9)$$

dove $A = l_1 l_2$ rappresenta l'area investita dalla radiazione. L'applicazione della seconda legge della dinamica implica per la lamina

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad -(p_r A)\mathbf{j} = m\mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad -(p_r l_1 l_2)\mathbf{j} = m\mathbf{a},$$

dalla quale deduciamo infine l'accelerazione

$$\mathbf{a} = -\left(\frac{p_r l_1 l_2}{m}\right)\mathbf{j} = -(8,85 \times 10^{-7} \text{ m/s}^2)\mathbf{j},$$

evidentemente rivolta nella direzione negativa di y .

Problema 3.15

Una barra rettilinea di lunghezza propria l_0 è parallela all'asse x' in un sistema inerziale S' che si muove con la velocità $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$ relativamente ad un secondo sistema di riferimento S . In S' la barra si muove nella direzione delle y' positive con velocità costante u mantenendo il suo baricentro sull'asse y' . Determinare a) l'angolo che, nel sistema S , la barra forma con l'asse x e b) la sua lunghezza nel medesimo sistema. (si veda pure il problema precedente)

Soluzione. Diversamente dal problema precedente, dove si chiedono le equazioni del moto di un punto, il baricentro, in questo è necessario considerare almeno due punti, gli estremi della barra e la loro reciproca posizione. Caratterizziamo questi estremi con l'introdurre un terzo sistema di riferimento inerziale, S'' , nel quale la barra è a riposo per cui le coordinate dei suoi estremi E_1 ed E_2 sono

$$S'': \quad E_1(x''_1, 0, 0, t''_1), \quad E_2(x''_2, 0, 0, t''_2) \quad (1)$$

con

$$x''_2 = -x''_1 \quad \text{e} \quad x''_2 - x''_1 = l_0. \quad (2)$$

Considerando che $\mathbf{u} = u\mathbf{j}$ è la velocità di S'' rispetto a S' (fig. 1), le coordinate spazio-temporali rilevate in S' e S'' sono collegate dalle trasformazioni di Lorentz

$$x'' = x', \quad y'' = \gamma_u(y' - ut'), \quad z'' = z', \quad t'' = \gamma_u(t' - uy'/c^2) \quad (3)$$

dove $\gamma_u = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$.

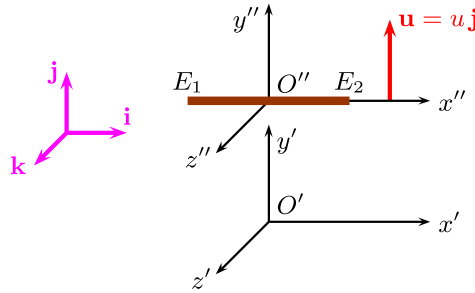


Fig. 1. Moto della barra in S' e sistema S'' solidale alla barra.

D'altra parte il sistema inerziale S' è in moto rispetto ad S con velocità $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$ (fig. 2)

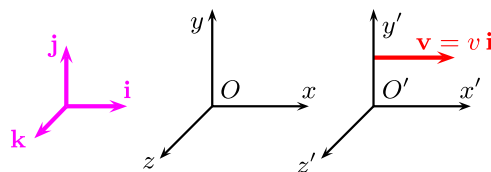


Fig. 2. Moto relativo di S' rispetto al sistema S .

cosicché riapplicando le trasformazioni di Lorentz tra questi due riferimenti abbiamo pure

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma(t - vx/c^2) \quad (4)$$

dove questa volta è $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Volendo collegare le coordinate degli estremi della barra in S'' con quelle rilevate in S inseriamo queste ultime nelle (3) e otteniamo le relazioni

$$\begin{cases} x'' = \gamma(x - vt) \\ y'' = \gamma_u[y - u\gamma(t - vx/c^2)] \\ z'' = z \\ t'' = \gamma_u[\gamma(t - vx/c^2) - uy/c^2]. \end{cases} \quad (5)$$

Poiché in S la barra è in moto la rilevazione degli estremi dev'essere eseguita nel medesimo istante per cui, ponendo $t_1 = t_2$ nelle precedenti discendono per l'estremo E_1 le coordinate

$$\begin{cases} x''_1 = \gamma(x_1 - vt_1) \\ y''_1 = \gamma_u[y_1 - u\gamma(t_1 - vx_1/c^2)] \\ z''_1 = z_1 \\ t''_1 = \gamma_u[\gamma(t_1 - vx_1/c^2) - uy_1/c^2] \end{cases} \quad (6)$$

mentre per E_2 le analoghe coordinate sono

$$\begin{cases} x''_2 = \gamma(x_2 - vt_1) \\ y''_2 = \gamma_u[y_2 - u\gamma(t_1 - vx_2/c^2)] \\ z''_2 = z_2 \\ t''_2 = \gamma_u[\gamma(t_1 - vx_2/c^2) - uy_2/c^2]. \end{cases} \quad (7)$$

Pertanto, alle dimensioni (2) della barra lungo i tre assi spaziali di S'' ,

$$x''_2 - x''_1 = l_0, \quad y''_2 - y''_1 = 0, \quad z''_2 - z''_1 = 0,$$

corrispondono in S le dimensioni

$$\begin{cases} l_0 = x''_2 - x''_1 = \gamma[(x_2 - x_1) - v \cdot 0] = \gamma(x_2 - x_1), \\ 0 = y''_2 - y''_1 = \gamma_u[(y_2 - y_1) - u\gamma(0 - v(x_2 - x_1)/c^2)] \\ \quad = \gamma_u[(y_2 - y_1) + uv\gamma(x_2 - x_1)/c^2] \\ 0 = z''_2 - z''_1 = z_2 - z_1, \end{cases} \quad (8)$$

$$\quad \quad \quad (9)$$

$$\quad \quad \quad (10)$$

e quindi dalla (8) discende ($\Delta x = x_2 - x_1$)

$$l_0 = \gamma \Delta x \quad \implies \quad \Delta x = \frac{l_0}{\gamma} = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (11)$$

mentre dalla (9) otteniamo il rapporto ($\Delta y = y_2 - y_1$)

$$\Delta y + \frac{uv\gamma\Delta x}{c^2} \implies \Delta y = -\frac{uv\gamma\Delta x}{c^2} \implies \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{uv\gamma}{c^2}. \quad (12)$$

a) Il risultato (11) esprime evidentemente la contrazione della lunghezza lungo l'asse x mentre (12) fornisce l'inclinazione della barra che deve quindi apparire ruotata ad un osservatore solidale ad S (fig. 3). L'angolo α che la barra fa con l'asse x è quindi

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{uv\gamma}{c^2}$$

dalla quale ricaviamo

$$\alpha = -\operatorname{arctg}\left(\frac{uv\gamma}{c^2}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{uv}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (13)$$

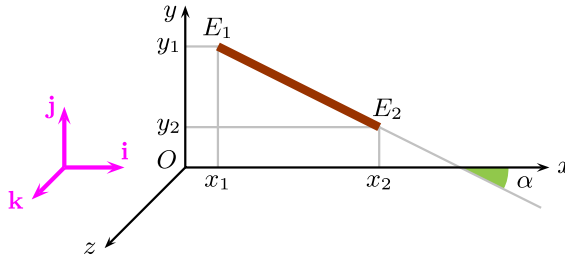


Fig. 3. Posizione istantanea della barra nel sistema inerziale S .

b) Infine, la lunghezza della barra in S è $l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ e, in base alle (11) e (12), risulta

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{\Delta x^2 + \left(-\frac{uv\gamma\Delta x}{c^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{l_0^2}{\gamma^2} + \left(\frac{u^2v^2\gamma^2}{c^4}\right)\frac{l_0^2}{\gamma^2}} \\ &= l_0\sqrt{\frac{1}{\gamma^2} + \frac{u^2v^2}{c^4}} = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{u^2v^2}{c^4}} \\ &= l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Nota 1. Il risultato (13), relativo all'angolo α , presenta due situazioni particolari collegate ciascuna all'annullarsi della velocità u oppure di v . Se quindi è $u = 0$ la barra è parallela all'asse x ($\alpha = 0$) e la sua lunghezza è, per la (14),

$$u = 0 \wedge v \neq 0, \implies \alpha = 0 \implies l = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

coerentemente con la sola contrazione della lunghezza lungo l'asse x . Se invece $v = 0$, la medesima relazione dà per la lunghezza

$$u \neq 0 \wedge v = 0, \implies \alpha = 0 \implies l = l_0$$

e quindi l'osservatore in S non rileva alcuna contrazione ma con la barra, disposta parallelamente a x , in moto lungo l'asse y .

Nota 2. Si veda il successivo problema 3.20 dove si fornisce una soluzione alternativa coinvolgendo le equazioni del moto degli estremi della barra.

Problema 3.18

Un razzo si muove alla velocità di $0,9c$ nella direzione positiva dell'asse x di un sistema inerziale S . Un osservatore solidale ad un secondo sistema inerziale S' in moto con velocità $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$ rispetto ad S rileva una velocità del razzo $\mathbf{v}' = -(0,9c)\mathbf{i}$. Determinare la velocità del sistema S' rispetto al sistema S .

Soluzione. Definita la simbologia per i moduli delle due velocità del razzo

$$S: v_r = 0,9c, \quad S': v'_r = 0,9c, \quad (1)$$

le corrispondenti grandezze vettoriali sono

$$S: \mathbf{v}_r = v_r\mathbf{i}, \quad S': \mathbf{v}'_r = -v'_r\mathbf{i}. \quad (2)$$

Poiché il moto avviene lungo gli assi $x-x'$ l'applicazione delle trasformazioni di Lorentz per le velocità (lasciamo implicita la simbologia)

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2}, \quad u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x v/c^2)}, \quad u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - u_x v/c^2)} \quad (3)$$

fornisce la terna

$$-v'_r = \frac{v_r - v}{1 - v_r v/c^2}, \quad v'_y = v'_z = 0 \quad (4)$$

dove l'unica grandezza incognita è la componente della velocità v . Pertanto la prima diviene

$$-v'_r(1 - v_r v/c^2) = v_r - v \implies -v'_r + v_r v'_r v/c^2 = v_r - v$$

e, esplicitando v , abbiamo

$$v = \frac{v_r + v'_r}{1 + v_r v'_r/c^2}. \quad (5)$$

Con i valori proposti la velocità di S' rispetto a S è $v = 0,9945c$.

In quanto segue intendiamo comunque ottenere il medesimo risultato, pur con una deduzione meno sintetica, sfruttando le trasformazioni di Lorentz delle coordinate

anziché quelle delle velocità. Aggiungiamo quindi alle (2) le ulteriori leggi del moto del razzo nei due sistemi S e S'

$$S: x_r = v_r t, \quad S': x'_r = -v'_r t' \quad (6)$$

dove abbiamo supposto che, nell'istante $t = t' = 0$ il razzo si trovi, in entrambi i sistemi, nell'origine comune. Per tale scelta l'evento iniziale è quindi

$$S: E_1(x_r = 0, t = 0), \quad S': E_1(x'_r = 0, t' = 0)$$

mentre l'evento successivo E_2 accade negli istanti t e t' e quindi è caratterizzato dalle coordinate spazio-temporali

$$S: E_2(x_r = v_r t, t), \quad S': E_2(x'_r = -v'_r t', t'). \quad (7)$$

Le trasformazioni di Lorentz collegano le coordinate dell'evento E_2 come

$$\begin{cases} x'_r = \gamma(x_r - vt) \\ t' = \gamma(t - vx_r/c^2) \end{cases} \quad (8)$$

che diventano con le sostituzioni delle (6)

$$\begin{cases} -v'_r t' = \gamma(v_r t - vt) \\ t' = \gamma[t - v(v_r t)/c^2] \end{cases} \quad (9)$$

$$(10)$$

Inserita la seconda nella prima ed eliminati i fattori comuni γ e t risulta

$$-v'_r \gamma [1 - v_r v/c^2] t = \gamma (v_r - v) t \implies -v'_r (1 - v_r v/c^2) = v_r - v$$

dalla quale otteniamo

$$-v'_r + v_r v'_r v/c^2 = v_r - v$$

e quindi la relazione finale

$$v = \frac{v_r + v'_r}{1 + v_r v'_r/c^2} \quad (11)$$

che, con i dati del problema, fornisce il valore $v = 0,9945c$.

Problema 4.23

Una sorgente puntiforme S di luce di potenza $P = 3,2 \times 10^{-3} \text{ W}$ diffonde fotoni di energia $E_\gamma = 5 \text{ eV}$ in modo isotropo. La sorgente è localizzata a distanza $d = 1 \text{ m}$ dal centro di una piccola sfera di metallo di raggio $r = 10 \text{ mm}$ e il cui lavoro di estrazione è $W_e = 3 \text{ eV}$. L'efficienza della emissione di fotoelettroni da parte del metallo è di uno per 10^6 fotoni incidenti. Assumendo che la sfera sia isolata e inizialmente neutra e che gli elettroni emessi siano istantaneamente allontanati dalla sfera, determinare: a) il numero di fotoelettroni emessi in un secondo; b) l'energia cinetica massima di questi fotoelettroni. Si osserva inoltre che l'emissione di elettroni si ferma dopo un certo tempo t . c) Determinare t . ($\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ C}/(\text{N m}^2)$).

Soluzione. La situazione descritta dal testo e riportata schematicamente nella figura 1 mostra come la distanza tra la sorgente S e la sferetta sia significativamente maggiore del raggio di quest'ultima. Potremo quindi ipotizzare che la superficie investita dai fotoni emessi da S con energia E_γ (corrispondenti ad una lunghezza d'onda ultravioletta di $\lambda = hc/E_\gamma = 249 \text{ nm}$) sia sostanzialmente pari all'area $\mathcal{A}$ di una sua sezione centrale

$$\mathcal{A} = \pi r^2 \quad (1)$$

in quanto la sferetta appare, vista da S , equivalente ad un cerchio di raggio r .

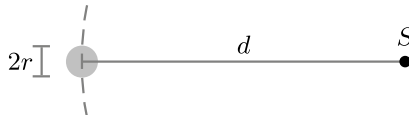


Fig. 1. Sorgente di luce S e piccola sfera metallica.

L'intensità I di una sorgente esprime l'energia che incide perpendicolarmente su una superficie unitaria nell'unità di tempo e questa dipende dalla potenza P della sorgente e dalla distanza da questa. Per la sorgente S , in quanto emette in modo isotropo, l'intensità è proporzionale alla potenza P e poiché l'energia emessa si distribuisce alla distanza d su una superficie sferica di area $4\pi d^2$ essa risulta inversamente proporzionale al quadrato della distanza secondo la relazione

$$I = \frac{P}{4\pi d^2}. \quad (2)$$

Ne segue che l'energia per unità di tempo E che incide sulla parte della sferetta esposta alla luce è

$$E = \mathcal{A} \cdot I$$

che per (1) e (2) diviene

$$E = \pi r^2 \left(\frac{P}{4\pi d^2} \right) = \frac{Pr^2}{4d^2}. \quad (3)$$

a) Se con n_γ indichiamo il numero di fotoni per unità di tempo che incidono sulla sferetta e consideriamo che ciascuno di questi trasporta l'energia E_γ , allora l'energia complessiva che associamo ad essi è $E = n_\gamma E_\gamma$ e la (3) si modifica in

$$n_\gamma E_\gamma = \frac{Pr^2}{4d^2}$$

dalla quale possiamo calcolare il flusso di fotoni sulla sferetta

$$n_\gamma = \frac{Pr^2}{4d^2 E_\gamma} = 10^{11} \text{ s}^{-1}. \quad (4)$$

Poiché è noto il rapporto tra il numero n_e di fotoelettroni sul numero n_γ di fotoni incidenti

$$a = \frac{n_e}{n_\gamma} = \frac{1}{10^6} = 10^{-6}, \quad (5)$$

calcoliamo di conseguenza il numero di fotoelettroni emessi dalla sferetta: esso risulta

$$n_e = a n_\gamma = 10^5 \text{ s}^{-1}. \quad (6)$$

b) L'energia cinetica massima dei fotoelettroni discende dall'applicazione della legge dell'effetto fotoelettrico

$$E_\gamma = W_e + K_{\max} \quad (7)$$

che fornisce con i dati del testo

$$K_{\max} = E_\gamma - W_e = (5 - 3) \text{ eV} = 2 \text{ eV}. \quad (8)$$

c) A seguito del flusso di fotoelettroni che lasciano la sferetta e della loro immediata rimozione questa, inizialmente neutra, si carica gradualmente di segno positivo.

Aumenta pertanto e in modo proporzionale alla carica il potenziale dell'intera sferetta ostacolando via via l'emissione di fotoelettroni. Il flusso di fotoelettroni ha termine quando anche gli elettroni più veloci di energia cinetica $K_{\max}$ non avranno l'energia sufficiente per sfuggire dal metallo. In tale situazione, con un potenziale della sferetta pari a V_0 , la loro energia totale, somma di cinetica $K_{\max}$ e potenziale $U = -eV_0$, dovrà essere nulla per cui

$$K_{\max} - eV_0 = 0$$

e quindi il potenziale d'arresto deve soddisfare la relazione

$$V_0 = \frac{K_{\max}}{e} \implies V_0 = 2 \text{ V} \quad (9)$$

il cui valore numerico si ricava immediatamente in quanto $K_{\max}$ è, per la (8) espresso in eV.

D'altra parte il potenziale di una sfera isolata è espresso dalla relazione

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (10)$$

e poiché il tasso di aumento della carica della sferetta è dato dalla (6), la carica q aumenta proporzionalmente con il tempo t come

$$q = (n_e e)t. \quad (11)$$

Mettendo assieme il risultato della (9) e sostituendo la precedente nella (10) troviamo

$$V_0 = \frac{(n_e e)t}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (12)$$

dalla quale possiamo esplicitare il tempo t e ottenere infine

$$t = \frac{4\pi\epsilon_0 r V_0}{n_e e} = 139 \text{ s.}$$

Problema 4.26

Un fotone di energia $E_0 = 10^4$ eV collide con un elettrone libero e a riposo e viene diffuso ad un angolo $\theta = 60^\circ$. Determinare: a) le variazioni di energia, frequenza e lunghezza d'onda del fotone, b) l'energia cinetica, la quantità di moto e la direzione dell'elettrone di rinculo.

Soluzione. a) Nota l'energia del fotone incidente

$$E_0 = 10^4 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-15} \text{ J} \quad (1)$$

ne discendono la sua lunghezza d'onda e frequenza

$$\lambda_0 = \frac{hc}{E_0} = 1,24 \times 10^{-10} \text{ m}, \quad f_0 = \frac{E_0}{h} = \frac{c}{\lambda_0} = 2,41 \times 10^{18} \text{ Hz}. \quad (2)$$

Le condizioni nelle quali avviene l'urto tra fotone ed elettrone soddisfano le ipotesi dell'effetto Compton per cui vale l'equazione

$$\lambda_1 = \lambda_0 + \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta) \quad (3)$$

dalla quale, noto l'angolo di diffusione θ , calcoliamo la lunghezza d'onda del fotone diffuso

$$\lambda_1 = 1,26 \times 10^{-10} \text{ m} \quad (4)$$

cui corrispondono la frequenza e l'energia

$$f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = 2,39 \times 10^{18} \text{ Hz}, \quad E_1 = hf_1 = \frac{hc}{\lambda_1} = 1,58 \times 10^{-15} \text{ J} = 9,9 \text{ keV}.$$

Le variazioni richieste sono quindi:

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= \lambda_1 - \lambda_0 = 1,21 \times 10^{-12} \text{ m}, \\ \Delta f &= f_1 - f_0 = -2,33 \times 10^{16} \text{ Hz}, \\ \Delta E &= E_1 - E_0 = -1,55 \times 10^{-17} \text{ J} = -96,7 \text{ eV}. \end{aligned} \quad (5)$$

b) L'energia cinetica dell'elettrone diffuso si deduce collegando l'energia prima dell'urto

$$E_i = E_0 + mc^2 \quad (6)$$

data dalla somma di quella del fotone con l'energia a riposo dell'elettrone, con quella finale

$$E_f = E_1 + E_e = E_1 + \sqrt{(p_e c)^2 + (mc^2)^2} \quad (7)$$

e nella quale E_e rappresenta l'energia totale relativistica dovuta al rinculo dell'elettrone e p_e la sua quantità di moto. La conservazione dell'energia implica

$$E_i = E_f \implies E_0 + mc^2 = E_1 + \sqrt{(p_e c)^2 + (mc^2)^2}$$

dalla quale

$$E_0 - E_1 = \sqrt{(p_e c)^2 + (mc^2)^2} - mc^2$$

e poiché il secondo membro rappresenta l'energia cinetica relativistica

$$\sqrt{(p_e c)^2 + (mc^2)^2} - mc^2 = K, \quad (8)$$

allora

$$E_0 - E_1 = K \implies K = -\Delta E = 1,55 \times 10^{-17} \text{ J} = 96,7 \text{ eV}$$

dove abbiamo utilizzato il risultato (5).

Possiamo ottenere la quantità di moto dell'elettrone dopo l'urto a partire dalla precedente (8) e risolvendo nell'incognita p_e . Ne deriva

$$\sqrt{(p_e c)^2 + (mc^2)^2} = K + mc^2$$

e quindi elevando al quadrato

$$\begin{aligned} (p_e c)^2 + (mc^2)^2 &= (K + mc^2)^2 \\ (p_e c)^2 + (mc^2)^2 &= K^2 + 2mc^2 K + (mc^2)^2 \\ (p_e c)^2 &= K^2 + 2mc^2 K \end{aligned}$$

da cui

$$p_e = \sqrt{\frac{K^2}{c^2} + 2mK} = 5,3 \times 10^{-24} \text{ kg m/s}.$$

L'angolo ϕ che definisce la direzione di rinculo dell'elettrone rispetto alla direzione del fotone incidente (fig. 1 del problema 4.25) si ricava dalla (28) dello stesso problema

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\cotg(\theta/2)}{1 + h/(mc\lambda_0)}.$$

con i dati forniti otteniamo

$$\operatorname{tg} \phi = 1,7 \implies \phi = \operatorname{arctg}(1,7) = 59,5^\circ.$$

Problema 4.45

Un atomo idrogenoide di numero atomico Z è in uno stato n altamente eccitato. L'atomo eccitato può fare una transizione al primo livello eccitato emettendo, in successione, due fotoni di energie 10,2 eV e 17 eV. In alternativa, l'atomo dallo stesso stato eccitato può fare una transizione al secondo stato eccitato emettendo ordinatamente due fotoni di energie 4,25 eV e 5,95 eV. Determinare i valori di n e Z .

Soluzione. Le energie di un sistema legato qual è un atomo idrogenoide, nell'ambito della teoria semiclassica di Bohr, sono espresse dalla relazione

$$E_n = -\left(\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2}\right) \frac{Z^2}{n^2} = \frac{E_1 Z^2}{n^2} = \frac{(-13,6 \text{ eV}) Z^2}{n^2} \quad (1)$$

con E_1 energia dello stato fondamentale dell'idrogeno. Queste stesse energie sono coinvolte nelle transizioni da uno stato iniziale m ad uno stato finale n ($m \rightarrow n$) e la variazione di energia $\Delta E_{m,n}$ subita dal sistema è data dalla

$$\Delta E_{m,n} = E_n - E_m = \frac{E_1 Z^2}{n^2} - \frac{E_1 Z^2}{m^2} = E_1 Z^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (2)$$

il cui segno è stato discusso nella nota del problema 4.38.

L'atomo, inizialmente nello stato eccitato con numero quantico n , ritorna al primo livello eccitato ($n = 2$) con due transizioni e coinvolgendo un livello intermedio che identifichiamo con il suo numero quantico x . Pertanto le energie di legame coinvolte sono

$$E_n = \frac{E_1 Z^2}{n^2}, \quad E_x = \frac{E_1 Z^2}{x^2}, \quad E_2 = \frac{E_1 Z^2}{2^2} \quad (3)$$

e le energie positive dei due fotoni emessi nelle transizioni $n \rightarrow x$ e $x \rightarrow 2$ sono

$$|\Delta E_{n,x}| = |E_x - E_n| = E_n - E_x = E_1 Z^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{x^2} \right) \quad (4)$$

$$|\Delta E_{x,2}| = |E_2 - E_x| = E_x - E_2 = E_1 Z^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2^2} \right), \quad (5)$$

e poiché queste sono conosciute è pure

$$|\Delta E_{n,x}| = 10,2 \text{ eV}, \quad |\Delta E_{x,2}| = 17 \text{ eV}. \quad (6)$$

Lo stesso atomo può scendere al secondo stato eccitato, $n = 3$, seguendo ordinatamente le due transizioni $n \rightarrow y$ e $y \rightarrow 3$ essendo y il numero che individua un livello intermedio tra n e 3. Dalla (1), le nuove energie di legame coinvolte sono ora

$$E_y = \frac{E_1 Z^2}{y^2}, \quad E_3 = \frac{E_1 Z^2}{3^2} \quad (7)$$

dalle quali discendono le energie (positive) dei due fotoni

$$|\Delta E_{n,y}| = |E_y - E_n| = E_n - E_y = E_1 Z^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{y^2} \right) \quad (8)$$

$$|\Delta E_{y,3}| = |E_3 - E_y| = E_y - E_3 = E_1 Z^2 \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{3^2} \right), \quad (9)$$

con

$$|\Delta E_{n,y}| = 4,25 \text{ eV}, \quad |\Delta E_{y,3}| = 5,95 \text{ eV}. \quad (10)$$

Disponiamo quindi di 4 equazioni, (4), (5), (8), (9), nelle 4 incognite n , Z , x e y ma, essendo interessati solo alle prime due incognite, osservata la loro struttura, sommiamo membro a membro la (4) con (5) per ottenere

$$|\Delta E_{n,x}| + |\Delta E_{x,2}| = (E_n - E_x) + (E_x - E_2) = E_n - E_2$$

ossia un'equazione nelle sole incognite n e Z

$$(10,2 + 17) \text{ eV} = E_1 Z^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2^2} \right). \quad (11)$$

Nello stesso modo, dalle (8) e (9),

$$|\Delta E_{n,y}| + |\Delta E_{y,3}| = (E_n - E_y) + (E_y - E_3) = E_n - E_3$$

giungiamo alla

$$(4,25 + 5,95) \text{ eV} = E_1 Z^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{3^2} \right). \quad (12)$$

Le equazioni (11) e (12) contengono, appunto, solo le incognite n e Z e si semplificano se dividiamo per $E_1 = -13,6 \text{ eV}$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{27,2}{13,6} = Z^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2^2} \right) \quad \Rightarrow \quad -2 = Z^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{4} \right) \end{array} \right. \quad (13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{10,2}{13,6} = Z^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{3^2} \right) \quad \Rightarrow \quad -\frac{3}{4} = Z^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{9} \right). \end{array} \right. \quad (14)$$

Sottraendo membro a membro la prima dalla seconda abbiamo

$$-\frac{3}{4} + 2 = \frac{Z^2}{n^2} - \frac{Z^2}{9} - \frac{Z^2}{n^2} + \frac{Z^2}{4}$$

e quindi

$$\frac{5}{4} = \frac{Z^2(-4+9)}{36} \quad \Rightarrow \quad Z^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad Z = 3.$$

Inserito questo risultato nella (14) troviamo, in definitiva,

$$-\frac{3}{4} = \frac{9}{n^2} - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} = \frac{9}{n^2} \quad \Rightarrow \quad n^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad n = 6.$$

Appendice

In questa appendice riportiamo l'elenco delle principali nozioni necessarie o utili per comprendere adeguatamente quanto esposto nei vari capitoli di questa raccolta.

Capitolo 1: Correnti alternate e circuiti oscillanti

- Valori efficaci
- Reattanza induttiva e capacitiva
- Impedenza in un circuito RLC in serie
- Differenza di fase tra corrente e tensione
- Formula di Galileo Ferraris
- Trasformatori
- Circuito oscillante LC

Capitolo 2: Equazioni di Maxwell e onde e.m.

- Legge di Ampère-Maxwell
- Vettore di Poynting
- Intensità di un'onda
- Densità media di energia e campi
- Pressione di radiazione
- Frequenza, lunghezza d'onda e velocità di propagazione di onde piane

Capitolo 3: Relatività Ristretta

- Dilatazione temporale
- Contrazione delle lunghezze
- Trasformazioni di Lorentz
- Trasformazioni delle velocità
- Quantità di moto relativistica
- Energia cinetica relativistica
- Legame tra energia e quantità di moto
- Energia e quantità di moto del fotone
- Urti e decadimenti di particelle

Capitolo 4: Introduzione alla fisica moderna

- Ipotesi di Planck e fotone (problemi: da 11.1 a 11.3)
- Corpo nero (da 11.4 a 11.9)
 - Legge di Stefan-Boltzmann del corpo nero e potere emissivo integrale

- Legge di Wien del corpo nero
- Potere emissivo differenziale o specifico e legge di Planck del corpo nero
- Effetto fotoelettrico (da 11.10 a 11.24)
 - Lavoro di estrazione
 - Frequenza di soglia
 - Potenziale d'arresto e energia cinetica massima
 - Legge dell'effetto fotoelettrico
- Effetto Compton (da 11.25 a 11.36)
 - Legge dell'effetto Compton e lunghezza d'onda diffusa
 - Angoli di diffusione del fotone e dell'elettrone
 - Interazione fotone-elettrone e leggi di conservazione
- Modello di Bohr e livelli energetici (da 11.37 a 11.49)
 - Quantizzazione del momento della quantità di moto
 - Raggi delle orbite elettroniche
 - Energie di legame di un atomo idrogenoide
 - Energie di eccitazione
 - Atomi riconducibili ad atomi idrogenoidi
 - Spettri di emissione