

Sviluppi di Fourier di alcune forme d'onda

Lorenzo Roi (7 gennaio 2011)

Onda a dente di sega

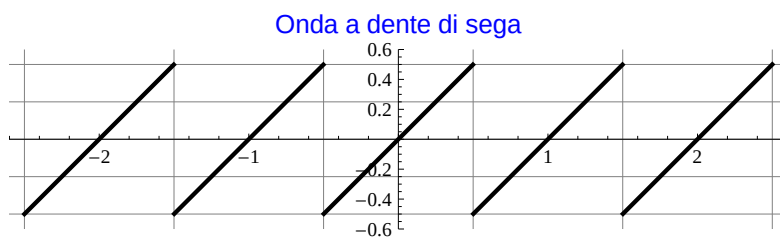
La funzione d'onda a dente di sega è definita come

$$y(t) = \frac{a}{T} t \quad -\frac{T}{2} \leq t < \frac{T}{2}, \quad (a = \text{costante assegnata}),$$

è periodica con periodo T e il suo sviluppo di Fourier è dato dalla serie

$$y(t) = a \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i \pi} \sin\left(\frac{2 \pi i}{T} t\right)$$

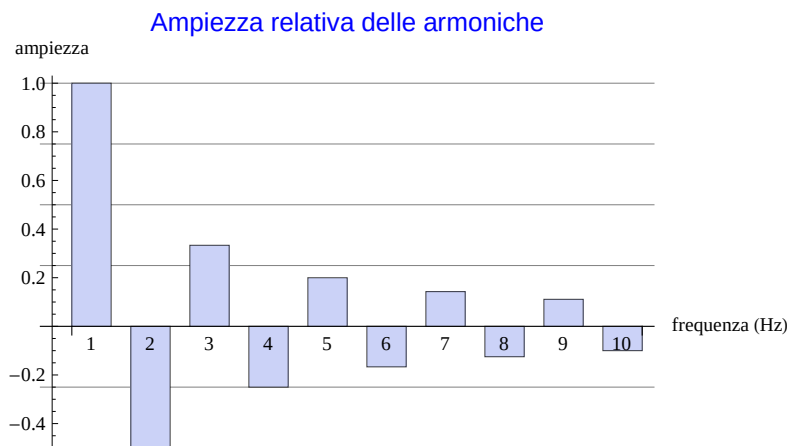
Il suo grafico ($a = 1$ e $T = 1$) risulta



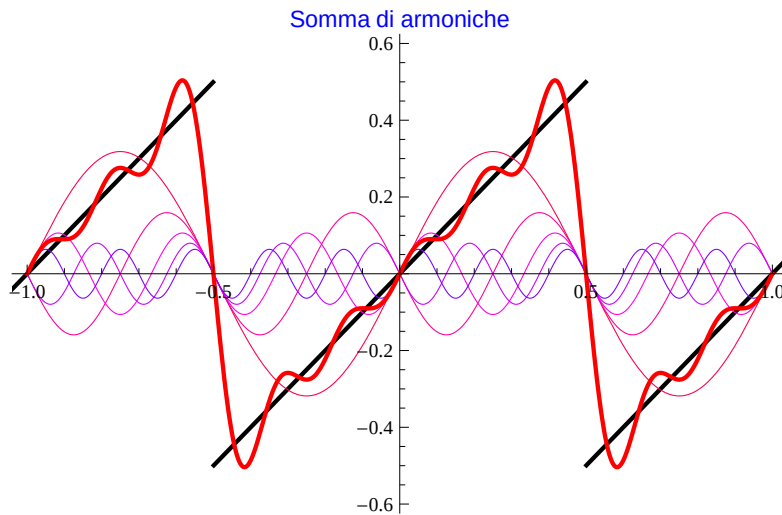
mentre le prime cinque armoniche sono

$$\left\{ \frac{\sin[2 \pi t]}{\pi}, -\frac{\sin[4 \pi t]}{2 \pi}, \frac{\sin[6 \pi t]}{3 \pi}, -\frac{\sin[8 \pi t]}{4 \pi}, \frac{\sin[10 \pi t]}{5 \pi} \right\}$$

Supposta l'ampiezza dell'armonica fondamentale pari ad 1 così come la sua frequenza, l'ampiezza delle successive armoniche in funzione della frequenza è rappresentata dall'istogramma



mentre la rappresentazione grafica che si ottiene al variare del numero di armoniche secondarie (per un massimo di 20) che la approssimano nella somma è data dal grafico seguente.



Onda triangolare

La funzione per un'onda triangolare è definita come

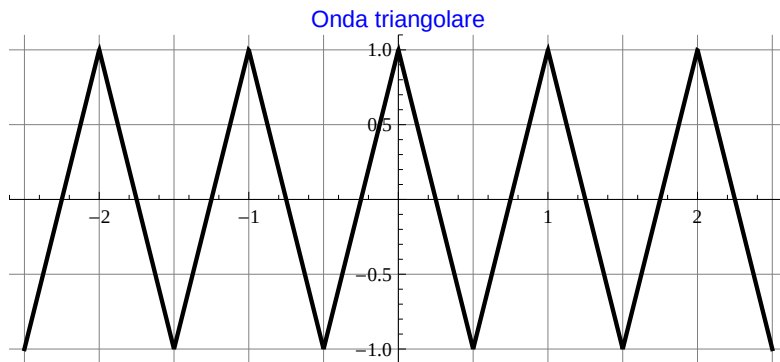
$$y(t) = a \left(1 + \frac{4}{T} t \right) \quad -\frac{T}{2} \leq t < 0$$

$$y(t) = a \left(1 - \frac{4}{T} t \right) \quad 0 \leq t < \frac{T}{2} \quad (a = \text{costante assegnata})$$

è periodica con periodo T e lo sviluppo di Fourier è

$$y(t) = a \sum_{i=0}^{\infty} \frac{8}{(2i+1)^2 \pi^2} \cos \left(\frac{2\pi(2i+1)}{T} t \right)$$

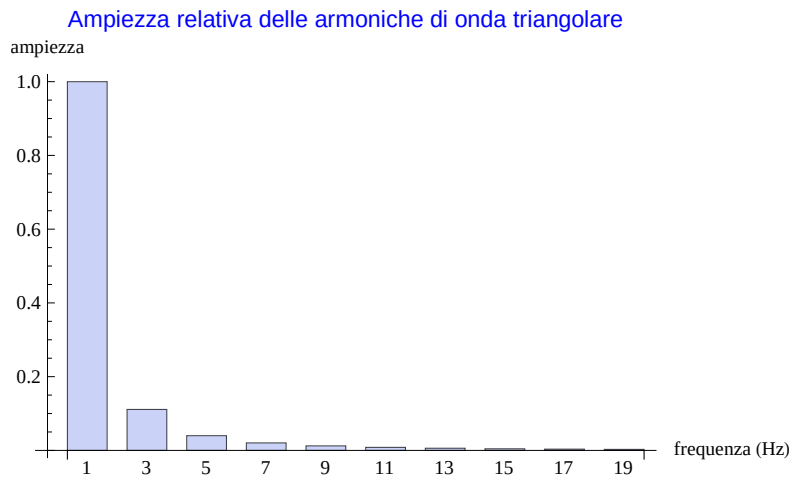
Il suo grafico ($a = 1$ e $T = 1$) è



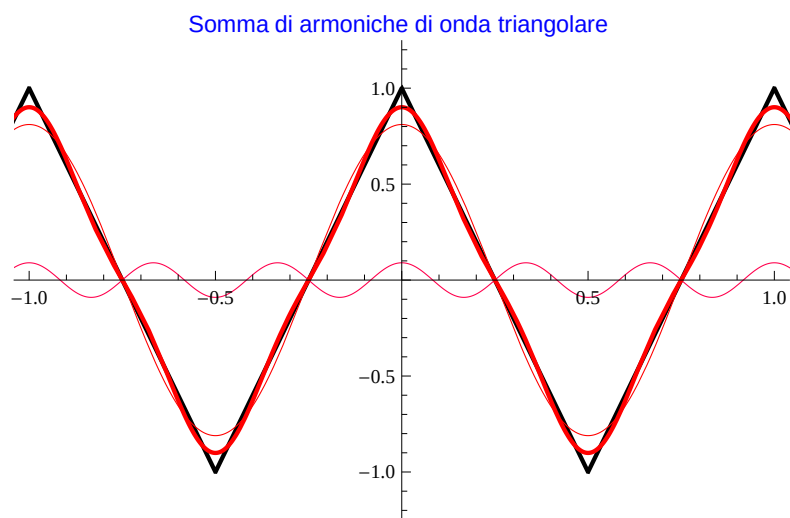
mentre le sue prime cinque armoniche sono le funzioni

$$\left\{ \frac{8 \cos[2\pi t]}{\pi^2}, \frac{8 \cos[6\pi t]}{9\pi^2}, \frac{8 \cos[10\pi t]}{25\pi^2}, \frac{8 \cos[14\pi t]}{49\pi^2}, \frac{8 \cos[18\pi t]}{81\pi^2} \right\}$$

Supposta pari ad 1 l'ampiezza dell'armonica fondamentale così come la sua frequenza, l'ampiezza delle successive armoniche in funzione della frequenza è rappresentata dall'istogramma



che mostra come l'ampiezza decresca rapidamente all'aumentare della frequenza. La rappresentazione grafica che si ottiene al variare del numero di armoniche secondarie (per un massimo di 10) è



Onda quadra

L'importante funzione *onda quadra* è definita come

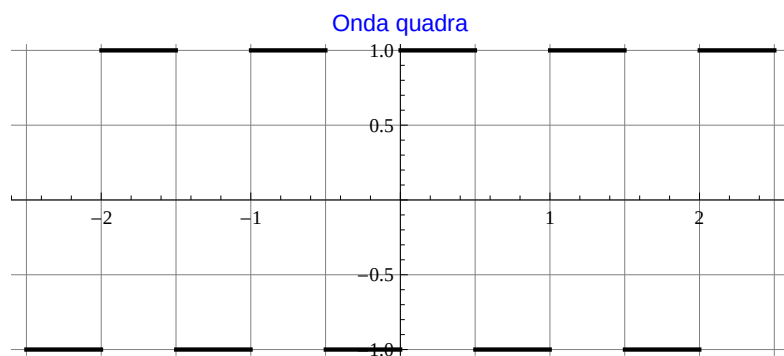
$$y(t) = -a \quad -\frac{T}{2} \leq t < 0$$

$$y(t) = +a \quad 0 \leq t < \frac{T}{2}$$

e possiede, come le precedenti, periodo T . Il suo sviluppo di Fourier è

$$y(t) = a \sum_{i=0}^{\infty} \frac{4}{(2i+1)\pi} \sin\left(\frac{2\pi(2i+1)}{T} t\right)$$

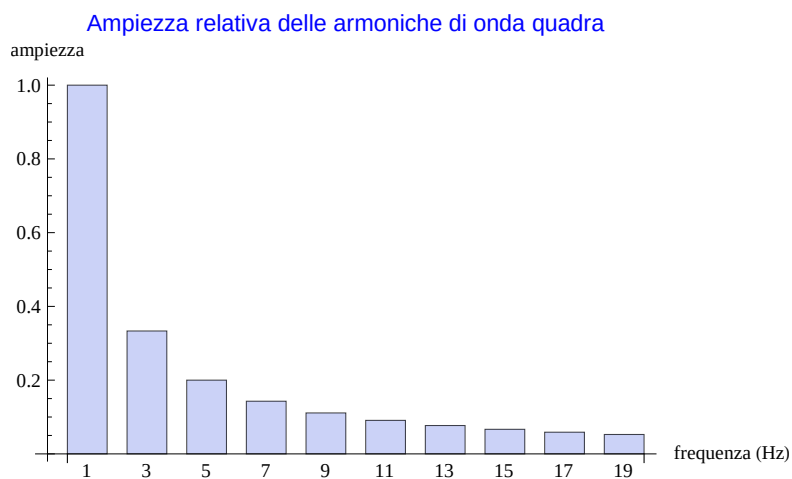
mentre il suo grafico risulta ($a = 1$ e $T = 1$)



Le sue prime cinque armoniche sono le funzioni

$$\left\{ \frac{4 \sin[2 \pi t]}{\pi}, \frac{4 \sin[6 \pi t]}{3 \pi}, \frac{4 \sin[10 \pi t]}{5 \pi}, \frac{4 \sin[14 \pi t]}{7 \pi}, \frac{4 \sin[18 \pi t]}{9 \pi} \right\}$$

e la loro ampiezza in rapporto all'armonica fondamentale decresce all'aumentare della frequenza come mostrato dall'istogramma



Infine, la somma delle armoniche fino ad un ordine massimo di 20 fornisce la rappresentazione grafica seguente

