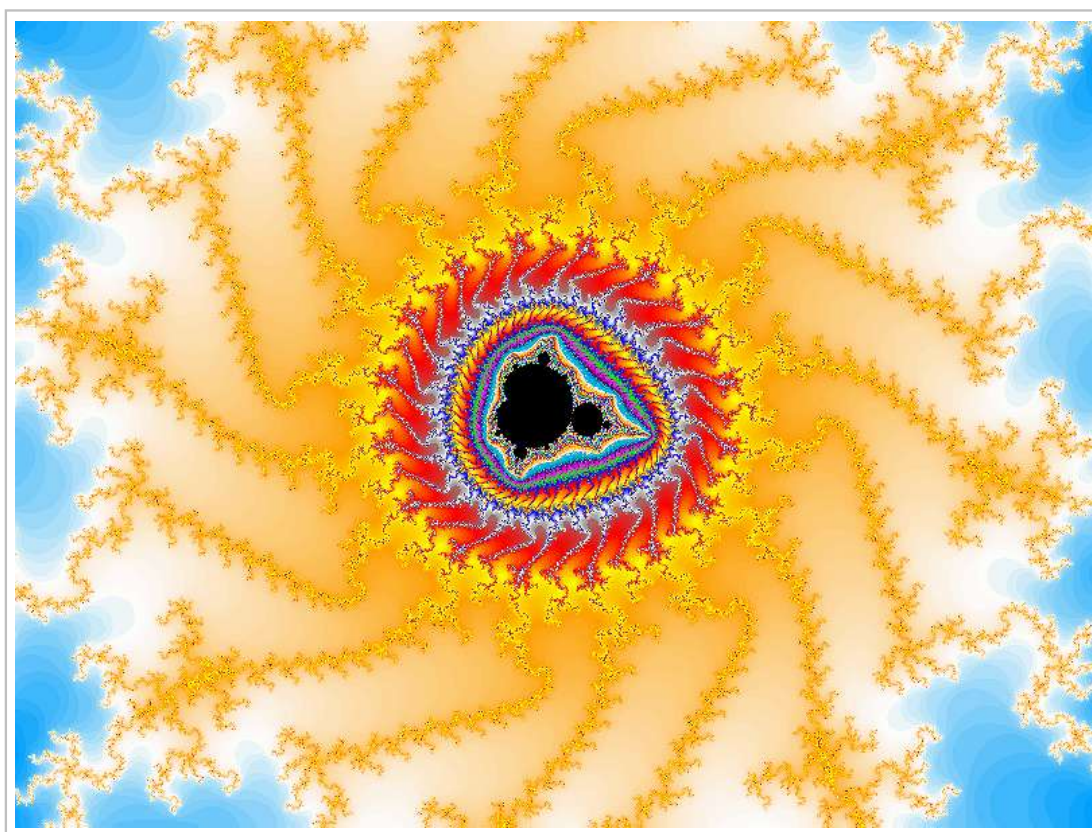


Problemi d'esame 2 2015-2018



LORENZO ROI

Edizioni H-ALPHA

© Edizioni H-ALPHA. Gennaio 2019. 

L'immagine frattale di copertina rappresenta un particolare dell'insieme di Mandelbrot centrato nel punto $(-0.930736, 0.307997)$ e ingrandito $1,5 \times 10^9$ volte.

Titolo: **Simmetrie frattali.**

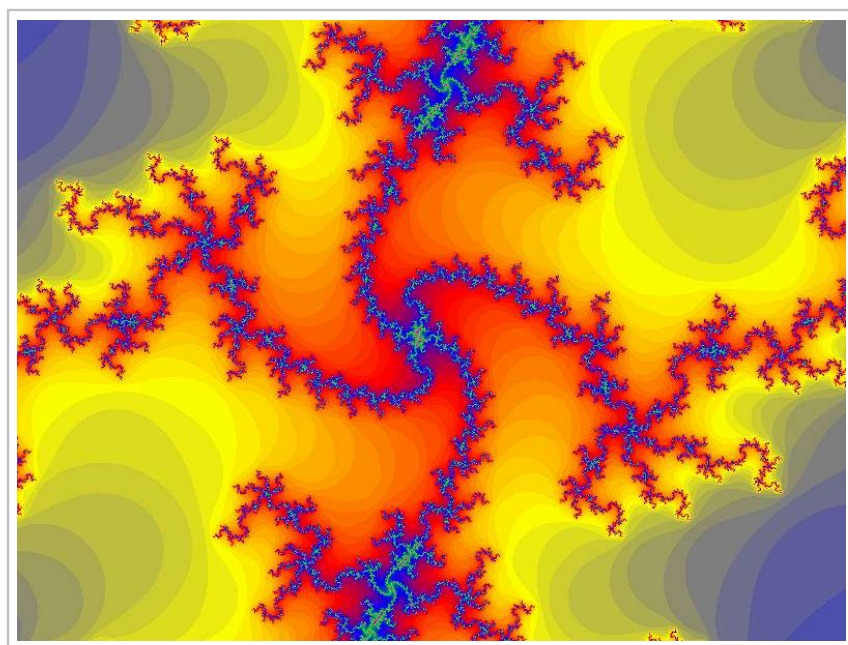
INTRODUZIONE

Testo e soluzioni dei problemi e quesiti assegnati negli anni 2015, 2016, 2017 e 2018 nella sessione ordinaria degli esami di Stato di liceo scientifico di ordinamento e opzione scienze applicate.

In **appendice** si riporta il solo testo delle prove suppletive.

Questo documento è il seguito di una precedente **raccolta** di temi proposti agli esami di Stato negli anni 2001-2014.

Lorenzo Roi



Particolare dell'insieme di Julia della copertina

INDICE

Esame 2015	1
problema 1	1
problema 2	2
quesito 1	3
quesito 2	3
quesito 3	3
quesito 4	3
quesito 5	3
quesito 6	4
quesito 7	4
quesito 8	4
quesito 9	4
quesito 10	4
Esame 2016	29
problema 1	29
problema 2	30
quesito 1	31
quesito 2	31
quesito 3	32
quesito 4	32
quesito 5	32
quesito 6	32
quesito 7	32
quesito 8	32
quesito 9	33
quesito 10	33
Esame 2017	59
problema 1	59
problema 2	61
quesito 1	62
quesito 2	62
quesito 3	62
quesito 4	63
quesito 5	63
quesito 6	63

quesito 7	63
quesito 8	63
quesito 9	64
quesito 10	64
 Esame 2018	 89
problema 1	89
problema 2	91
quesito 1	91
quesito 2	91
quesito 3	92
quesito 4	92
quesito 5	92
quesito 6	92
quesito 7	92
quesito 8	93
quesito 9	93
quesito 10	93
 APPENDICE	 119
Esame 2015 suppletiva	120
Esame 2016 suppletiva	123
Esame 2017 suppletiva	126
Esame 2018 suppletiva	129

pagina lasciata intenzionalmente vuota

ESAME 2015

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

• Problema n. 1

Il piano tariffario proposto da un operatore telefonico prevede, per le telefonate all'estero, un canone fisso di 10 euro al mese, più 10 centesimi per ogni minuto di conversazione. Indicando con x i minuti di conversazione effettuati in un mese, con $f(x)$ la spesa totale nel mese e con $g(x)$ il costo medio al minuto:

1. individua l'espressione analitica delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ e rappresentale graficamente; verifica che la funzione $g(x)$ non ha massimi né minimi relativi e dai la tua interpretazione dell'andamento delle due funzioni alla luce della situazione concreta che esse rappresentano.
2. Detto x_0 il numero di minuti di conversazione già effettuati nel mese corrente, determina x_1 tale che:

$$g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2}.$$

Traccia il grafico della funzione che esprime x_1 in funzione di x_0 e discuti il suo andamento. Che significato ha il suo asintoto verticale?

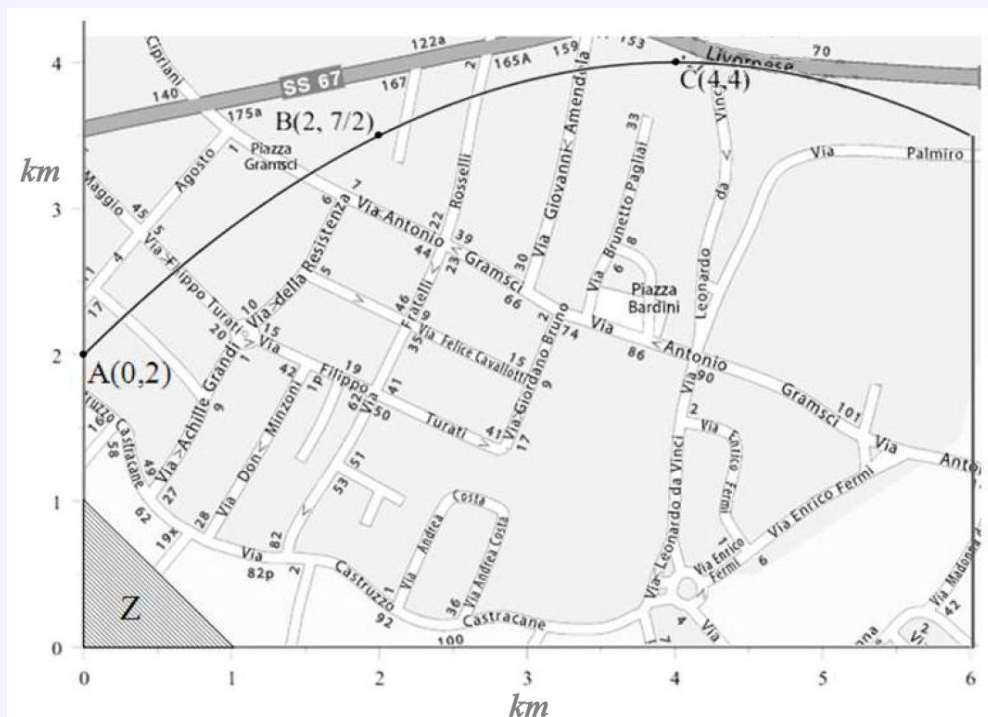


Figura 1

Sul suo sito web l'operatore telefonico ha pubblicato una mappa che rappresenta la copertura del segnale telefonico nella zona di tuo interesse:

La zona è delimitata dalla curva passante per i punti A , B , e C , dagli assi x e y , e dalla retta di equazione $x = 6$; la porzione etichettata con la "Z", rappresenta un'area non coperta dal segnale telefonico dell'operatore in questione.

3. Rappresenta il margine superiore della zona con una funzione polinomiale di secondo grado, verificando che il suo grafico passi per i tre punti A , B e C . Sul sito web dell'operatore compare la seguente affermazione: *"nella zona rappresentata nella mappa risulta coperto dal segnale il 96% del territorio"*; verifica se effettivamente è così.

L'operatore di telefonia modifica il piano tariffario, inserendo un sovrapprezzo di 10 centesimi per ogni minuto di conversazione successivo ai primi 500 minuti.

4. Determina come cambiano, di conseguenza, le caratteristiche delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$, riguardo agli asintoti, alla monotonia, continuità e derivabilità, individua eventuali massimi e minimi assoluti della funzione $g(x)$ e della sua derivata e spiegate il significato nella situazione concreta.

Soluzione

• Problema n. 2

La funzione derivabile $y = f(x)$ ha, per $x \in [-3, 3]$, il grafico Γ , disegnato in figura 2. Γ presenta tangenti orizzontali per $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Le aree delle regioni A , B , C e D sono rispettivamente 2, 3, 3, e 1. Sia $g(x)$ una primitiva di $f(x)$ tale che $g(3) = -5$.

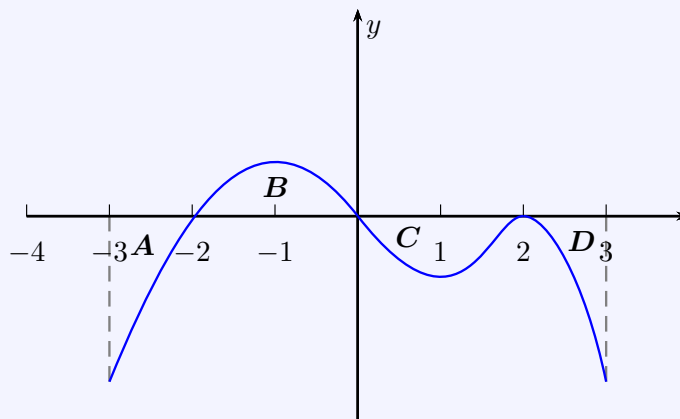


Figura 2

1. Nel caso $f(x)$ fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito.
2. Individua i valori di $x \in [-3, 3]$, per cui $g(x)$ ha un massimo relativo e determina i valori di x per i quali $g(x)$ volge la concavità verso l'alto.

3. Calcola $g(0)$ e, se esiste, il $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+g(x)}{2x}$.
4. Sia $h(x) = 3 \cdot f(2x+1)$, determina il valore di $\int_{-2}^1 h(x) dx$.

Soluzione

Questionario

1. Determinare l'espressione analitica della funzione $y = f(x)$ sapendo che la retta $y = -2x + 5$ è tangente al grafico di f nel secondo quadrante e che $f'(x) = -2x^2 + 6$.

Soluzione

2. Dimostrare che il volume del tronco di cono è espresso dalla formula:

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r),$$

dove R ed r sono i raggi e h l'altezza.

Soluzione

3. Lanciando una moneta sei volte qual è la probabilità che si ottenga testa "al più" due volte? Qual è la probabilità che si ottenga testa "almeno" due volte?

Soluzione

4. Di quale delle seguenti equazioni differenziali la funzione $y = \frac{\ln(x)}{x}$ è soluzione?

$$y'' + 2 \cdot \frac{y'}{x} = y$$

$$y' + x \cdot y'' = 1$$

$$x \cdot y' = \frac{1}{x} + y$$

$$x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + \frac{2}{x} = y.$$

Soluzione

5. Determinare un'espressione analitica della retta perpendicolare nell'origine al piano di equazione $x + y - z = 0$.

Soluzione

6. Sia f la funzione, definita per tutti gli x reali, da

$$f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 + (x-5)^2,$$

determinare il minimo di f .

Soluzione

7. Detta $A(n)$ l'area del poligono regolare di n lati inscritto in un cerchio C di raggio r , verificare che $A(n) = \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{n}$ e calcolarne il limite per $n \rightarrow \infty$.

Soluzione

8. I lati di un triangolo misurano, rispettivamente, 6 cm, 6 cm e 5 cm. Preso a caso un punto P all'interno del triangolo, qual è la probabilità che P disti più di 2 cm da tutti e tre i vertici del triangolo?

Soluzione

9. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - kx + k & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

determinare il parametro k in modo che nell'intervallo $[0, 2]$ sia applicabile il teorema di Lagrange e trovare il punto di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza.

Soluzione

10. Il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ ($x \in \mathbb{R}, x \geq 0$) divide in due porzioni il rettangolo $ABCD$ avente vertici $A(1, 0)$, $B(4, 0)$, $C(4, 2)$ e $D(1, 2)$. Calcolare il rapporto tra le aree delle due porzioni.

Soluzione

Problema n. 1: soluzione. (testo del problema)

1. I dati forniti dal problema sono:

$$\text{canone} = c = 10 \text{ €/mese}, \quad \text{tariffa} = t = 0,1 \text{ €/min.}$$

Se quindi la variabile x rappresenta

$$x = \frac{\text{numero di minuti di conversazione}}{\text{mese}},$$

la spesa totale nel mese ottenuta sommando al canone il costo delle telefonate effettuate è dato simbolicamente dalla

$$f(x) = c + t \cdot x = 10 + 0,1 \cdot x \quad \text{€/mese.}$$

Il numero di minuti di telefonate in un mese può evidentemente variare in modo discreto da 0, nel caso non si faccia alcuna telefonata, al numero massimo di minuti in un mese (in tal caso si sarebbe costantemente al telefono!) che, se di 30 giorni, è pari a $60 \cdot 24 \cdot 30 = 43.200$. Date comunque le richieste del testo circa la rappresentazione grafica e l'esistenza di massimi/minimi e/o asintoti, considereremo la variabile x come continua e appartenente a $\mathbb{R}^+$: viceversa alcune richieste (continuità, derivabilità, ...) non avrebbero alcun significato. Pertanto lasciando implicita l'unità di misura, avremo

$$f(x) = 10 + 0,1 \cdot x, \quad \text{con } x \geq 0. \quad (1)$$

Il costo medio al minuto (e al mese) $g(x)$, è espresso invece da

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{10 + 0,1x}{x} = \frac{10}{x} + 0,1 \quad (2)$$

con, evidentemente, $x > 0$ ma più realisticamente se pensiamo si faccia almeno un minuto di conversazione, $x \geq 1$.

La rappresentazione grafica della funzione $f(x)$ è immediata essendo la (1) un'espressione lineare in x . Essa è quindi rappresentata da una semiretta con pendenza pari a 0,1 e termine noto 10 (fig. 1).

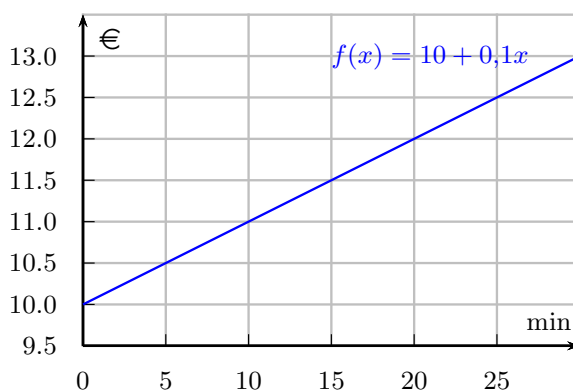


Fig. 1. Andamento della funzione spesa mensile $f(x)$.

Il costo medio $g(x)$ è invece rappresentato da un ramo di iperbole equilatera in quanto l'espressione (2) è un caso particolare della forma

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

rappresentativa delle funzioni omografiche il cui grafico è costituito da un'iperbole equilatera traslata. In particolare, questa classe di funzioni presenta

- un asintoto verticale deducibile dalla condizione $cx + d = 0$ e quindi di equazione $x = -d/c$ e
- un asintoto orizzontale la cui equazione, $y = a/c$, discende dal limite

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c}.$$

Determinati questi asintoti è sufficiente individuare un punto di tale funzione per poterne poi disegnare approssimativamente il grafico: nel nostro caso poniamo $g(x) = 0$ ottenendo $x = -100$ mentre l'asintoto verticale risulta l'asse y delle ordinate in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} \left(\frac{10}{x} + 0,1 \right) = \pm \infty$$

e quello orizzontale è $y = 0,1$ avendosi (fig. 2)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{10}{x} + 0,1 \right) = 0 + 0,1 = 0,1.$$

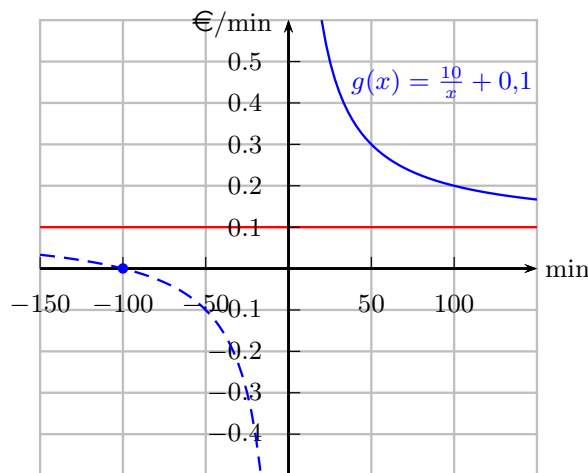


Fig. 2. Andamento della funzione costo medio $g(x)$ per $x \in \mathbb{R}_0$.

D'altra parte, come detto, è $x > 0$ per cui la parte coerente con le condizioni effettive del problema è costituita dal ramo positivo della $g(x)$ rappresentato, assieme all'asintoto orizzontale, in fig. 3.

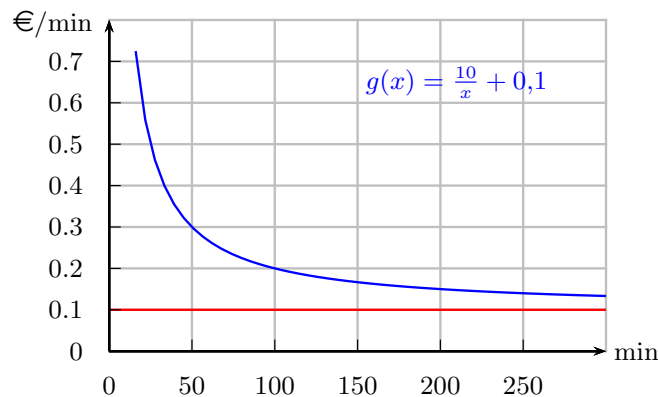


Fig. 3. Andamento della funzione costo medio $g(x)$ per $x > 0$.

Evidentemente la funzione $g(x)$ non possiede formalmente alcun punto di massimo o minimo ma se consideriamo che si faccia almeno un minuto di conversazione allora esiste un massimo pari a

$$g(1) = \frac{10}{1} + 0,1 = 10,1 \text{ €/min}$$

che coincide numericamente con la spesa mensile $f(1) = 10 + 1 \cdot 0,1 = 10,1 \text{ €}$ nella (remota) ipotesi che si faccia un solo minuto di conversazione.

Ulteriori osservazioni: all'aumentare del numero di minuti di conversazione il costo mensile aumenta linearmente mentre quello medio diminuisce e gradualmente si avvicina al costo medio asintotico di $0,1 \text{ €/min}$ senza comunque mai raggiungerlo. Per curiosità, se la conversazione (o le conversazioni) durasse l'intero mese (!) il costo medio raggiungerebbe un minimo pari a $g(43.200) = 10/43.200 + 0,1 \approx 0,10023$ (ma la spesa "schizzerebbe" a 4.330 € !).

2. Se x_0 sono i minuti di conversazione effettuati e x_1 i minuti necessari affinché il costo medio si dimezzi, allora x_1 deve soddisfare la relazione proposta dal testo

$$g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2} \quad (3)$$

che, in forma esplicita, diviene

$$\frac{10}{x_1} + 0,1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{10}{x_0} + 0,1 \right) \implies \frac{10}{x_1} + 0,1 = \frac{10}{2x_0} + 0,05$$

e risolta nell'incognita x_1 fornisce

$$\frac{10}{x_1} = \frac{10}{2x_0} - 0,05 \implies \frac{10}{x_1} = \frac{10 - 0,1x_0}{2x_0}$$

da cui

$$x_1 = \frac{20x_0}{10 - 0,1x_0} = \frac{200x_0}{100 - x_0}$$

con x_0 che deve soddisfare le condizioni $x_0 > 0$ e, affinché la precedente abbia significato, $x_0 \neq 100$. Pertanto la funzione

$$\begin{cases} x_1 = \frac{200x_0}{100 - x_0} \\ x_0 > 0 \wedge x_0 \neq 100 \end{cases} \quad (4)$$

si può interpretare come una ulteriore funzione omografica con asintoto verticale di equazione $x_0 = 100$, asintoto orizzontale $x_1 = -200$ in quanto

$$\lim_{x_0 \rightarrow \infty} \left(\frac{200x_0}{100 - x_0} \right) = \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \left[\frac{200x_0}{x_0(100/x_0 - 1)} \right] = \frac{200}{(-1)} = -200$$

e passante per il punto di coordinate $x_0 = 0 = x_1$ cioè per l'origine di un sistema cartesiano di coordinate (x_0, x_1) (fig. 4).

L'andamento di x_1 è evidentemente crescente con x_0 appartenente all'intervallo $]0, 100[$ mentre quando $x_0 > 100$ la possibilità di dimezzare il costo medio diviene impossibile in quanto $x_1 < 0$. Inoltre all'avvicinarsi di x_0 a 100 minuti, x_1 tende ad assumere valori sempre maggiori e tendenti a $+\infty$. Difatti il costo medio di $x_0 = 100$ minuti risulta

$$g(100) = \frac{10}{100} + 0,1 = 0,1 + 0,1 = 0,2 \text{ €/min}$$

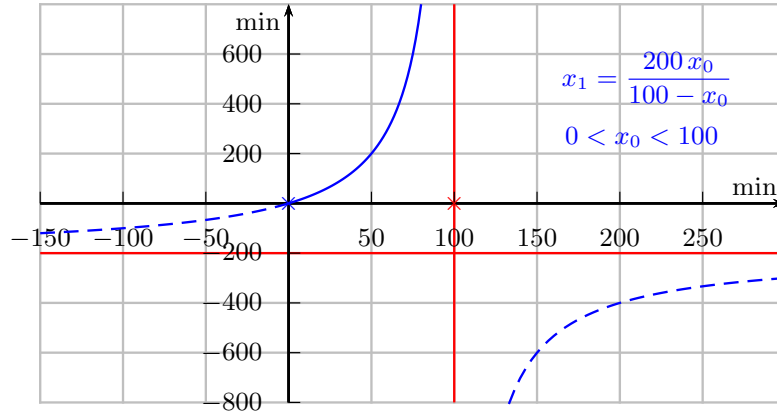


Fig. 4. Andamento della funzione x_1 per $0 < x < 100$.

e, per quanto evidenziato **precedentemente** circa l'andamento asintotico di $g(x)$, non è possibile raggiungere un costo medio pari alla metà di 0,2 €/min ossia il valore asintotico di 0,1 €/min.

3. La funzione polinomiale di II grado passante per i punti $A(0, 2)$, $B(2, \frac{7}{2})$ e $C(4, 4)$ non può che essere una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ per cui, imponendo il passaggio per A , B e C abbiamo subito

$$\begin{cases} 2 = 0 + 0 + c \\ \frac{7}{2} = 4a + 2b + c \\ 4 = 16a + 4b + c \end{cases}$$

da cui $c = 2$ e quindi

$$\begin{cases} \frac{7}{2} = 4a + 2b + 2 \\ 4 = 16a + 4b + 2 \end{cases} \implies \begin{cases} -7 = -8a - 4b - 4 \\ 4 = 16a + 4b + 2 \end{cases}$$

e sommando membro a membro le due equazioni $-3 = 8a - 2$ da cui $a = -\frac{1}{8}$ e $b = 1$. La parabola che rappresenta il margine è quindi

$$y = -\frac{1}{8}x^2 + x + 2.$$

Il calcolo dell'area sottostante tale parabola e delimitata dalle rette $x = 0$ e $x = 6$ e comprendente la zona etichettata sulla mappa con Z priva di copertura si deduce dal calcolo dell'integrale

$$\mathcal{A} = \int_0^6 \left(-\frac{1}{8}x^2 + x + 2 \right) dx.$$

Questo implica l'insieme di primitive

$$\int \left(-\frac{1}{8}x^2 + x + 2 \right) dx = -\frac{1}{8} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c$$

e di conseguenza assume il valore

$$\mathcal{A} = \left[-\frac{x^3}{24} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^6 = \left(-\frac{6^3}{24} + 18 + 12 \right) = -9 + 18 + 12 = 21 \text{ km}^2.$$

Poiché l'area triangolare $\mathcal{A}(Z)$ non coperta dal segnale risulta

$$\mathcal{A}(Z) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 0,5 \text{ km}^2,$$

la percentuale di copertura effettiva appare essere

$$\text{copertura}\% = \left(\frac{\mathcal{A} - \mathcal{A}(Z)}{\mathcal{A}} \right) \cdot 100 = \left(\frac{21 - 0,5}{21} \right) \cdot 100 = 97,62\%$$

per cui il valore dichiarato di 96% corrisponde alla realtà.

4. A seguito della modifica del piano tariffario la spesa dopo i primi 500 minuti sarà data dalla somma del canone mensile (10 €), dal costo di ciascun minuto di conversazione (0,1 €/min) e dal sovrapprezzo di 0,1 €/min per ogni minuto che eccede 500 cioè $0,1(x - 500)$ con $x > 500$: la nuova funzione è quindi

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } 0 \leq x \leq 500 \\ f(x) + 0,1(x - 500), & \text{se } x > 500. \end{cases}$$

Dato che

$$f(x) + 0,1(x - 500) = 10 + 0,1x + 0,1x - 50 = 0,2x - 40,$$

la funzione spesa è esplicitamente

$$F(x) = \begin{cases} 10 + 0,1x, & \text{se } 0 \leq x \leq 500 \\ 0,2x - 40, & \text{se } x > 500. \end{cases} \quad (5)$$

La spesa oltre i 500 minuti si può pure ottenere considerando la somma della spesa dei primi 500 minuti comprensiva del canone $f(500) = 10 + 0,1 \cdot 500 = 10 + 50 = 60$ con la spesa per ciascun minuto oltre i 500 data da $(0,1 + 0,1)(x - 500) = 0,2(x - 500)$ essendo ora 0,2 €/min il costo effettivo di ogni minuto di conversazione. Difatti le due espressioni coincidono

$$f(500) + 0,2(x - 500) = 60 + 0,2x - 100 = 0,2x - 40.$$

Ne segue che il costo medio al minuto $G(x)$ è rappresentato dalle

$$G(x) = \begin{cases} g(x) = \frac{10}{x} + 0,1, & \text{se } 0 < x \leq 500 \\ \frac{F(x)}{x} = \frac{0,2x - 40}{x} = 0,2 - \frac{40}{x}, & \text{se } x > 500 \end{cases} \quad (6)$$

Il grafico di (5) è costituito da una spezzata in quanto entrambi i rami di $F(x)$ dipendono linearmente da x . Poiché

$$\lim_{x \rightarrow 500-} (10 + 0,1x) = 10 + 0,1 \cdot 500 = 60 = \lim_{x \rightarrow 500+} (0,2x - 40) = 100 - 40,$$

la funzione $F(x)$ è continua nel suo dominio e in particolar nel punto di contatto $x = 500$: non è invece derivabile in tale punto in quanto la funzione derivata $F'(x)$

$$F'(x) = \begin{cases} 0,1, & \text{se } 0 \leq x \leq 500 \\ 0,2, & \text{se } x > 500 \end{cases}$$

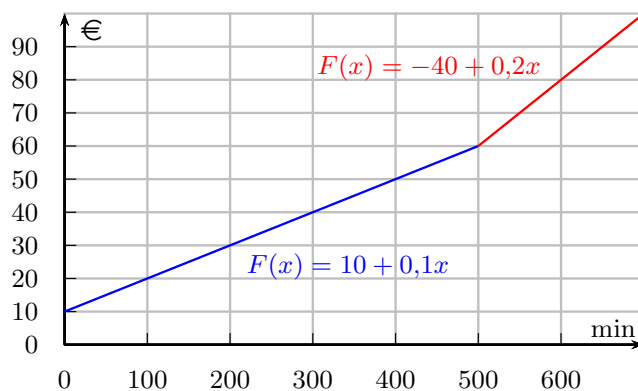


Fig. 5. Andamento della nuova funzione spesa mensile $F(x)$.

è manifestamente discontinua valendo

$$\lim_{x \rightarrow 500-} 0,1 \neq \lim_{x \rightarrow 500+} 0,2.$$

In ogni caso la nuova funzione spesa $F(x)$ è crescente strettamente e il suo andamento è rappresentato in fig. 5. Il minimo è raggiunto per $x = 0$ (i 10 € di canone) mentre non possiede massimo (salvo, come già detto, considerare la spesa per una conversazione lunga ... un mese!).

Il grafico della funzione $G(x)$ coincide per il primo tratto dove $0 < x \leq 500$ con la funzione $g(x)$ già studiata. Se invece $x > 500$ la $G(x)$ diviene

$$G(x) = 0,2 - \frac{40}{x}, \quad x > 500 \quad (7)$$

ed è ancora una funzione omografica con asintoto verticale $x = 0$ e orizzontale $y = 0,2$ €/min. Inoltre risulta $G(200) = 0$ per cui, indipendentemente dalle condizioni, il suo grafico è quello di fig. 6.

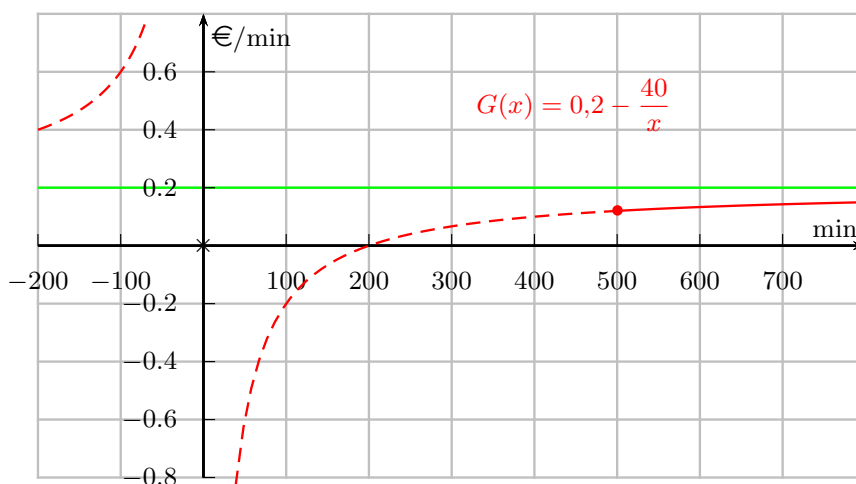


Fig. 6. Andamento della funzione $G(x)$ per $x > 500$.

Nel punto di raccordo i limiti destro e sinistro sono rispettivamente

$$\lim_{x \rightarrow 500-} \left(\frac{10}{x} + 0,1 \right) = \frac{10}{500} + 0,1 = \frac{3}{25} = 0,12,$$

$$\lim_{x \rightarrow 500+} \left(0,2 - \frac{40}{x} \right) = 0,2 - \frac{40}{500} = 0,12$$

per cui pure la $G(x)$ è continua in $x = 500$ e nel dominio. Il calcolo delle derivate prime nei due sottoinsiemi del dominio $]0, 500] \cup]500, +\infty[$ implica

$$G'(x) = \begin{cases} -\frac{10}{x^2}, & 0 < x \leq 500 \\ \frac{40}{x^2}, & x > 500 \end{cases} \quad (8)$$

e tale funzione presenta una discontinuità di I specie in quanto i suoi limiti, sinistro

$$\lim_{x \rightarrow 500-} \left(-\frac{10}{x^2} \right) = -\frac{10}{500^2} < 0,$$

e destro

$$\lim_{x \rightarrow 500+} \frac{40}{x^2} = \frac{40}{500^2} > 0$$

sono manifestamente diversi e finiti. Il punto $(500; 0,12)$ è quindi un punto angoloso. Unendo i grafici delle figg. 3 e 6 otteniamo il grafico 7 della funzione $G(x)$ (6) che rappresenta il nuovo costo medio.

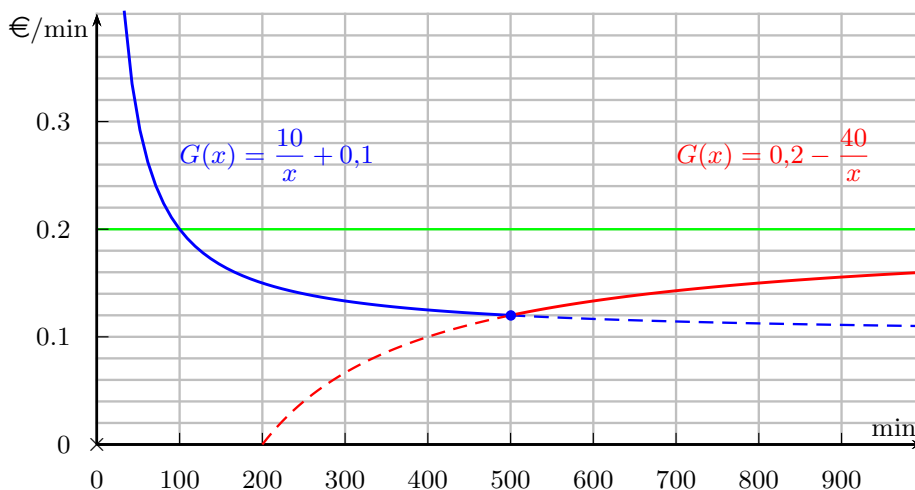


Fig. 7. Andamento della funzione $G(x)$ per $x > 0$.

Il costo medio presenta un minimo assoluto pari a $0,12 \text{ €/min}$ in corrispondenza di $x = 500$ ma non possiede un massimo. La monotonia è decrescente nell'intervallo

$$0 < x \leq 500 \quad \text{dove} \quad G'(x) = -\frac{10}{x^2} < 0,$$

crescente invece per

$$x > 500 \quad \text{dove} \quad G'(x) = \frac{40}{x^2} > 0.$$

Possiede infine due asintoti: quello verticale coincide con l'asse $x = 0$ mentre quello orizzontale è dato dall'equazione $y = 0,2$. Il costo medio delle telefonate diminuisce con continuità raggiungendo il valore di $0,12 \text{ €/min}$ quando si sono accumulati 500 minuti di conversazione: successivamente, superata tale soglia, comincia ad aumentare avvicinandosi ad un costo medio di $0,2 \text{ €/min}$.

Per quanto riguarda la funzione derivata (8), in aggiunta a quanto già detto a riguardo della sua discontinuità in $x = 500$ e del segno, aggiungiamo il calcolo dei suoi limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{10}{x^2} \right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{40}{x^2} = 0$$

e lo studio del segno della sua derivata $G''(x)$. Quest'ultima risulta

$$G''(x) = \begin{cases} \frac{20}{x^3}, & 0 < x \leq 500 \\ -\frac{80}{x^3}, & x > 500 \end{cases}$$

per cui il grafico di $G'(x)$ sarà crescente in $]0, 500]$ in quanto $G''(x) = 20/x^3 > 0$ mentre è decrescente in $x > 500$ in quanto $G''(x) = -80/x^3 < 0$. Il grafico di $G'(x)$ è quindi rappresentato dalla fig. 8.

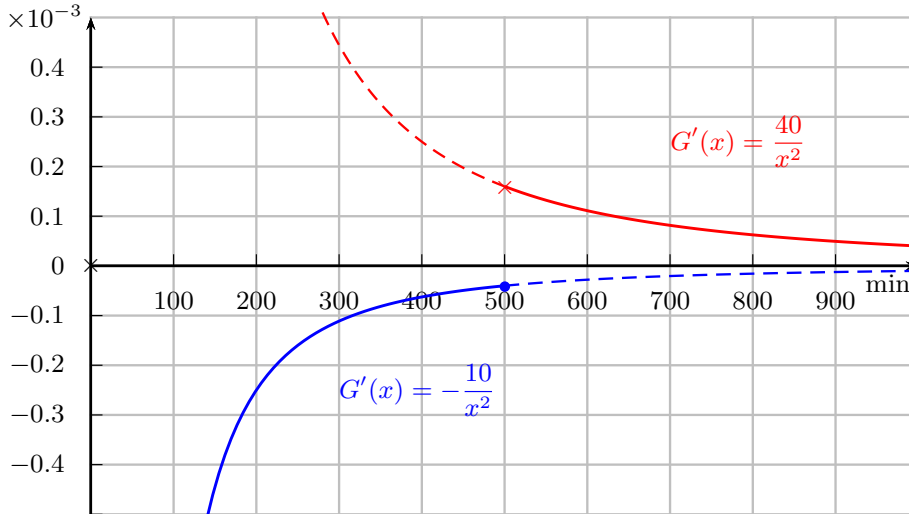


Fig. 8. Andamento della funzione $G'(x)$ per $x > 0$.

Problema n. 2: soluzione. (testo del problema)

1. Le condizioni cui deve soddisfare la funzione $f(x)$ riguardano rispettivamente a) il passaggio per i punti dell'asse x

$$f(-2) = f(0) = f(2) = 0, \quad (1)$$

b) l'avere una retta tangente orizzontale in

$$f'(-1) = f'(1) = f'(2) = 0, \quad (2)$$

e c) le aree delle regioni finite indicate nella fig. 1 **A**, **B**, **C** e **D** pari a

$$\mathcal{A}(\mathbf{A}) = 2, \quad \mathcal{A}(\mathbf{B}) = \mathcal{A}(\mathbf{C}) = 3, \quad \mathcal{A}(\mathbf{D}) = 1. \quad (3)$$

Un'ulteriore condizione riguarda una primitiva $g(x)$ della $f(x)$ per la quale risulta $g(3) = -5$.

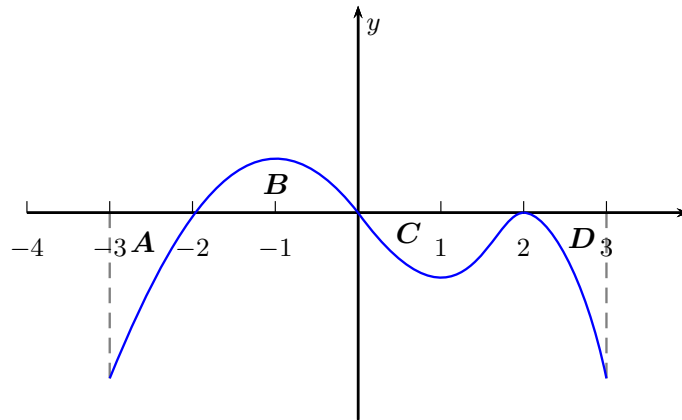


Fig. 1. Grafico Γ della funzione $y = f(x)$ per $x \in [-3, 3]$.

Le condizioni sono ben dieci per cui, dato che $f(x)$ è dichiarata polinomiale, non potranno che essere soddisfatte da un polinomio rappresentativo di nono grado che è caratterizzato dai 10 coefficienti delle potenze di x (dal grado 9 al grado 0). Γ potrà comunque essere descritto anche da un polinomio di grado superiore per cui la risposta circa il grado minimo non potrà che essere $\text{gradoMin}[f(x)] = 9$. Inoltre, per la numerosità delle condizioni e il valore elevato del grado, non sarà certo possibile determinare esplicitamente la funzione, deduzione peraltro non richiesta.

Se però *ci limitiamo* all'osservazione più *immediata* ossia che il grafico Γ della funzione interseca l'asse delle x in corrispondenza dei punti di ascissa $x = \pm 2, 0$, possiamo dedurre che il polinomio $f(x)$ dovrà essere scomponibile nei fattori $(x+2)$, x , $(x-2)$. Difatti solo così l'equazione $f(x) = 0$ avrà come zeri $x = \pm 2$ e $x = 0$. Poiché inoltre in $x = 2$, Γ è tangente all'asse x in quanto $f'(2) = 0$, il termine $(x-2)$ dovrà avere una molteplicità pari a 2 ossia $f(x)$ presenterà il fattore $(x-2)^2$. Pertanto la $f(x)$ si potrà fattorizzare come

$$f(x) = q(x) \cdot [x(x+2)(x-2)^2] \quad (4)$$

dove $q(x)$ rappresenta un polinomio che non dovrà annullarsi in $[-3, 3]$ e tale che

$$\text{grado}[f(x)] = \text{grado}[q(x)] + 4. \quad (5)$$

Poiché si chiede il grado minimo di $f(x)$, questo si otterrà in corrispondenza del grado minimo di $q(x)$ e questo non può che essere zero cioè quando $q(x) = \text{costante}$. Il grado minimo di $f(x)$ è, *sulla sola base di tali osservazioni*, $\text{gradoMin}[f(x)] = 4$.

2. Poiché $g(x)$ è una primitiva di $f(x)$, tale funzione si può collegare alla $f(x)$ con l'integrale

$$g(x) = \int_{-3}^x f(t) dt + c \quad \text{con} \quad g(3) = -5 \quad (6)$$

ma pure con la condizione $g'(x) = f(x)$. Pertanto la ricerca del massimo relativo si riconduce allo studio del segno di $g'(x)$ e questo è deducibile dal grafico Γ . In particolare, dalla fig. 1 discende il segno

$$\begin{aligned} g'(x) &\geq 0 & \text{se} & \quad -2 \leq x \leq 0 \quad \vee \quad x = 2 \\ g'(x) &< 0 & \text{se} & \quad -3 \leq x < -2 \quad \vee \quad 0 < x < 2 \quad \vee \quad 2 < x \leq 3 \end{aligned}$$

riassunto in forma grafica dalla fig. 2.

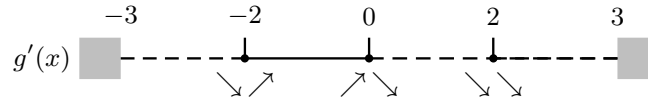


Fig. 2. Segno di $g'(x)$.

Questa mostra come nell'intervallo $[-3, 3]$, $g(x)$ presenti un massimo relativo in corrispondenza dell'ascissa $x = 0$ (e un minimo in $x = -2$ nonché un flesso orizzontale in $x = 2$).

Lo studio delle concavità/convessità si basa sull'uguaglianza $g''(x) = f'(x)$ per cui il segno di $g''(x)$ si deduce osservando in Γ (fig. 1) gli intervalli in cui $f(x)$ risulta crescente o decrescente. Questi, riassunti formalmente di seguito e rappresentati graficamente dalla fig. 3, mostrano come la concavità sia rivolta verso l'alto in $[-3, -1[\cup]1, 2[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 & \text{se} & \quad -3 < x < -1 \quad \vee \quad 1 < x < 2 \\ f'(x) &= 0 & \text{se} & \quad x = \pm 1 \quad \vee \quad x = 2 \\ f'(x) &< 0 & \text{se} & \quad -1 < x < 1 \quad \vee \quad 2 < x \leq 3 \end{aligned}$$

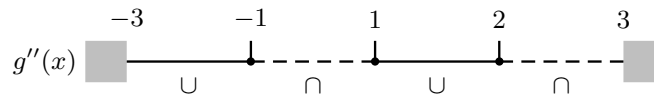


Fig. 3. Segno di $g''(x)$.

3. Per il calcolo di $g(0)$ va considerato che $g(x)$ è una primitiva di $f(x)$ ossia

$$g(x) = \int_{-3}^x f(t) dt + c, \quad x \in [-3, 3]. \quad (7)$$

Poiché viene assegnata la condizione $g(3) = -5$ possiamo determinare la costante additiva c ponendo nella precedente $x = 3$

$$g(3) = \int_{-3}^3 f(t) dt + c. \quad (8)$$

D'altra parte, l'interpretazione geometrica dell'integrale a secondo membro di (8) permette di stimarne il valore esprimendolo come somma "algebraica" delle aree delle regioni $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ che, per quanto stabilito nel testo del problema (3), valgono

$$\mathcal{A}(\mathbf{A}) = 2, \quad \mathcal{A}(\mathbf{B}) = \mathcal{A}(\mathbf{C}) = 3, \quad \mathcal{A}(\mathbf{D}) = 1. \quad (9)$$

In base a ciò risulta

$$g(3) = -\mathcal{A}(\mathbf{A}) + \mathcal{A}(\mathbf{B}) - \mathcal{A}(\mathbf{C}) - \mathcal{A}(\mathbf{D}) + c$$

da cui discende

$$c = g(3) - [-\mathcal{A}(\mathbf{A}) + \mathcal{A}(\mathbf{B}) - \mathcal{A}(\mathbf{C}) - \mathcal{A}(\mathbf{D})]$$

per cui, sostituendo i valori riportati in (9), la costante c vale

$$c = -5 - [-2 + 3 - 3 - 1] = -2$$

e di conseguenza

$$g(x) = -2 + \int_{-3}^x f(t) dt. \quad (10)$$

Allo stesso modo discende il valore di $g(0)$ definito dalla

$$g(0) = -2 + \int_{-3}^0 f(t) dt$$

per cui

$$g(0) = -2 + [-\mathcal{A}(\mathbf{A}) + \mathcal{A}(\mathbf{B})] = -2 + [-2 + 3] = -1.$$

Con quest'ultimo risultato il calcolo del limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + g(x)}{2x}$$

appare indeterminato in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} [1 + g(x)] = 1 - g(0) = 1 - 1 = 0$$

e $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$. D'altra parte, il calcolo del limite del rapporto delle derivate delle funzioni $1 + g(x)$ e $2x$ restituisce l'espressione

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{D[1 + g(x)]}{D(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x)}{2} \quad (11)$$

e poiché $g'(x) = f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ come si deduce dal grafico Γ , il limite (11) si risolve in

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x)}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

Pertanto, poiché le ipotesi del teorema di De L'Hôpital sono soddisfatte dalle funzioni $1 + g(x)$ e $2x$ ed esiste il limite (11), possiamo applicare il teorema e concludere che dev'essere

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + g(x)}{2x} = 0.$$

4. Con la posizione $h(x) = 3 \cdot f(2x + 1)$, l'integrale richiesto $\int_{-2}^1 h(x) dx$ diviene

$$\int_{-2}^1 h(x) dx = \int_{-2}^1 3 \cdot f(2x + 1) dx = 3 \int_{-2}^1 f(2x + 1) dx. \quad (12)$$

Definita la sostituzione $t = 2x + 1$, la relazione tra i differenziali che ne discende è $dt = 2 dx$ da cui $dx = \frac{1}{2} dt$ mentre gli estremi di integrazione di (12) diventano

$$\begin{aligned} \text{se } x = -2 &\implies t = 2(-2) + 1 = -4 + 1 = -3 \\ \text{se } x = 1 &\implies t = 2(1) + 1 = 3. \end{aligned}$$

L'integrale (12) diviene ora

$$3 \int_{-2}^1 f(2x + 1) dx = 3 \int_{-3}^3 \frac{1}{2} f(t) dt = \frac{3}{2} \int_{-3}^3 f(t) dt$$

per cui, sfruttando l'interpretazione geometrica dell'ultimo integrale come somma algebrica di aree, abbiamo in definitiva

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \int_{-3}^3 f(t) dt &= \frac{3}{2} [-\mathcal{A}(\mathbf{A}) + \mathcal{A}(\mathbf{B}) - \mathcal{A}(\mathbf{C}) - \mathcal{A}(\mathbf{D})] \\ &= \frac{3}{2} [-2 + 3 - 3 - 1] = -\frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Quesito n. 1: soluzione. (testo del quesito)

Della funzione incognita $f(x)$ è assegnata la derivata $f'(x) = -2x^2 + 6$ per cui essa apparterrà all'insieme di primitive espresse dall'integrale indefinito

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (-2x^2 + 6) dx$$

la cui soluzione è elementare

$$f(x) = \int (-2x^2 + 6) dx = -2 \left(\frac{x^3}{3} \right) + 6x + c. \quad (1)$$

Va quindi determinata la costante additiva c . A tal fine, la condizione che la retta rappresentata dalla $y = -2x + 5$ sia tangente al grafico della f si traduce nell'uguaglianza delle rispettive derivate ossia nell'equazione

$$f'(x) = y' \implies f'(x) = D(-2x + 5) \implies -2x^2 + 6 = -2, \quad (2)$$

risolta dai valori

$$-2x^2 + 6 = -2 \implies 2x^2 = 8 \implies x = \pm 2.$$

Poiché il punto di tangenza P appartiene al II quadrante la sua ascissa dev'essere $x_P = -2$ mentre l'ordinata si deduce sostituendo tale valore nell'equazione della retta

$$y_P = -2x_P + 5 = -2(-2) + 5 = 9 \implies P(-2, 9).$$

Possiamo ora conoscere la costante c e quindi la funzione incognita imponendo che P appartenga al grafico di f ossia, ripresa la (1), che sia $f(-2) = 9$. Segue

$$f(-2) = -\frac{2}{3}(-2)^3 + 6(-2) + c = 9 \implies c = 9 + 12 - \frac{16}{3} = \frac{47}{3}$$

per cui in definitiva risulta

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 6x + \frac{47}{3}.$$

Quesito n. 2: soluzione. (testo del quesito)

Seguiamo, per questa prima dimostrazione, una via analitica definendo i punti $A(0, r)$ e $B(h, R)$ ($0 < r < R$ e $h > 0$) in un piano cartesiano e determinando la retta passante per questi (fig. 1).

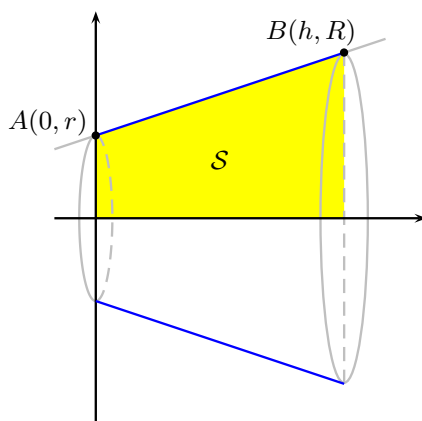


Fig. 1. Retta per A e B e solido di rotazione.

Tale retta ha termine noto $y_A = r$ ed equazione $y = m_{AB}x + r$ con il coefficiente angolare dato dalla

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{R - r}{h - 0} = \frac{R - r}{h} \quad \text{cioè} \quad y = \left(\frac{R - r}{h}\right)x + r.$$

La regione S evidenziata in colore nella fig. 1 genera, in una rotazione completa attorno all'asse x il tronco di cono con raggi r e R e altezza h come definiti dal testo del quesito. Il suo volume si determina quindi utilizzando la formula per i solidi di rotazione

$$\mathcal{V} = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

e quindi con l'integrale

$$\mathcal{V} = \pi \int_0^h \left(\frac{R-r}{h} \cdot x + r \right)^2 dx.$$

Sviluppando il quadrato ad argomento

$$\mathcal{V} = \pi \int_0^h \left[\left(\frac{R-r}{h} \right)^2 x^2 + r^2 + 2r \left(\frac{R-r}{h} \right) x \right] dx$$

per cui eseguendo l'integrazione giungiamo all'espressione

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \pi \left[\left(\frac{R-r}{h} \right)^2 \cdot \frac{x^3}{3} + r^2 x + 2r \left(\frac{R-r}{h} \right) \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^h \\ &= \pi \left[\left(\frac{R-r}{h} \right)^2 \cdot \frac{h^3}{3} + r^2 h + 2r \left(\frac{R-r}{h} \right) \cdot \frac{h^2}{2} \right]. \end{aligned}$$

Non rimane che eseguire alcune semplificazioni algebriche

$$\mathcal{V} = \pi \left[(R-r)^2 \cdot \frac{h}{3} + r^2 h + rh(R-r) \right],$$

svolgere il quadrato e ridurre i termini simili trovando

$$\mathcal{V} = \pi \left[(R^2 + r^2 - 2rR) \frac{h}{3} + r^2 h + rRh - r^2 h \right] = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + r^2 + rR)$$

come volevasi dimostrare.

In alternativa, intendiamo seguire una dimostrazione con prevalente carattere geometrico e coinvolgente nozioni elementari. La fig. 2 mostra un tronco di cono avente per basi due cerchi di raggio rispettivamente R e r con $R > r$ ed altezza h .

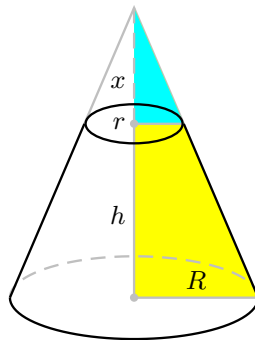


Fig. 2. Tronco di cono circolare retto.

Evidentemente la base minore del tronco (e così il tronco stesso) è ottenuta dal cono sezionando questo solido con un piano parallelo alla base maggiore e perpendicolare all'altezza (fig. 2). Se x è la distanza della base minore dal vertice del cono, un qualsiasi piano passante per l'altezza permette di riconoscere due triangoli rettangoli simili aventi in comune il vertice del cono (in colore nella fig. 2). Con gli elementi forniti dal testo possiamo quindi scrivere la proporzione

$$\frac{x}{r} = \frac{x+h}{R}. \quad (1)$$

D'altra parte il volume $\mathcal{V}$ è dato dalla differenza del volume del cono $\mathcal{V}_1$ del quale il tronco è parte, con quello di un secondo cono $\mathcal{V}_2$ avente come base la base minore del tronco. Pertanto $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2$ per cui, nota la formula per il volume del cono, abbiamo

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}(\pi R^2)(h+x) - \frac{1}{3}(\pi r^2)x = \frac{1}{3}\pi[R^2h + (R^2 - r^2)x]. \quad (2)$$

Ricavando x dalla (1)

$$xR = xr + hr \implies x(R-r) = hr \implies x = \frac{hr}{R-r}$$

e sostituita in (2), discende

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\pi \left[R^2h + (R^2 - r^2) \frac{hr}{R-r} \right] = \frac{1}{3}\pi h \left[R^2 + (R+r)(R-r) \frac{r}{R-r} \right]$$

da cui, dopo una semplificazione,

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + rR)$$

che è quanto si voleva.

Quesito n. 3: soluzione. (testo del quesito)

La probabilità che esca testa in un lancio di una moneta non truccata è evidentemente $p = \frac{1}{2}$ mentre la probabilità di ottenere k volte testa in n lanci è descritta dalla distribuzione binomiale

$$P(k, p) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad (1)$$

Poiché $p = \frac{1}{2}$ così come $1-p = \frac{1}{2}$, la (1) si riduce alla

$$P\left(k, \frac{1}{2}\right) = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

per cui, poiché si chiede la probabilità che sia $P(0 \leq k \leq 2)$, con un numero di lanci pari a $n = 6$, risulta

$$\begin{aligned} P(0 \leq k \leq 2) &= P\left(0, \frac{1}{2}\right) + P\left(1, \frac{1}{2}\right) + P\left(2, \frac{1}{2}\right) \\ &= \binom{6}{0} \cdot \frac{1}{2^6} + \binom{6}{1} \cdot \frac{1}{2^6} + \binom{6}{2} \cdot \frac{1}{2^6} \\ &= \frac{1}{2^6}(1 + 6 + 15) = \frac{22}{64} = \frac{11}{32} \approx 0,3438. \end{aligned}$$

Si chiede inoltre che il numero di successi (testa) sia almeno due cioè formalmente $P(k \geq 2)$. Possiamo in tal caso sfruttare il teorema della probabilità contraria ossia

$$P(k \geq 2) = 1 - P(k < 2)$$

e quindi

$$\begin{aligned} P(k \geq 2) &= 1 - P\left(0, \frac{1}{2}\right) - P\left(1, \frac{1}{2}\right) \\ &= 1 - \binom{6}{0} \cdot \frac{1}{2^6} - \binom{6}{1} \cdot \frac{1}{2^6} \\ &= 1 - \frac{1}{2^6}(1 + 6) = 1 - \frac{7}{64} = \frac{57}{64} \approx 0,8906. \end{aligned}$$

Quesito n. 4: soluzione. (testo del quesito)

Una funzione per essere soluzione di un'equazione differenziale deve ridurre quest'ultima ad una identità una volta che si sostituisca la funzione stessa e le sue derivate nell'equazione differenziale. Poiché nelle quattro equazioni proposte compaiono la derivata prima e seconda converrà calcolare esplicitamente queste derivate. Se quindi la funzione è

$$y = \frac{\ln(x)}{x}, \quad (1)$$

la sua derivata prima risulta

$$y' = \frac{\left(\frac{1}{x} \cdot x - \ln x\right)}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} \quad (2)$$

mentre la derivata seconda è

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{2}{x^3} - \left(\frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \ln x}{x^4}\right) = -\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^3} + \frac{2 \ln x}{x^3} \\ &= -\frac{3}{x^3} + \frac{2 \ln x}{x^3}. \end{aligned} \quad (3)$$

Passiamo ora alla verifica sostituendo queste espressioni in ciascuna delle quattro equazioni differenziali.

$$(a) \quad y'' + 2 \cdot \frac{y'}{x} = y \quad \implies \quad \left(-\frac{3}{x^3} + \frac{2 \ln x}{x^3}\right) + \frac{2}{x} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right) = \frac{\ln x}{x}$$

dalla quale deduciamo

$$-\frac{3}{x^3} + \frac{2 \ln x}{x^3} + \frac{2}{x^3} - \frac{2 \ln x}{x^3} = \frac{\ln x}{x} \quad \implies \quad -\frac{1}{x^3} = \frac{\ln x}{x}$$

che costituisce un'equazione e non una identità.

$$(b) \quad y' + x \cdot y'' = 1 \quad \implies \quad \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right) + x \cdot \left(-\frac{3}{x^3} + \frac{2 \ln x}{x^3}\right) = 1$$

si riduce alla

$$\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} - \frac{3}{x^2} + \frac{2 \ln x}{x^2} = 1 \implies -\frac{2}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2} = 1$$

e, ancora, non è una identità.

$$(c) \quad x \cdot y' = \frac{1}{x} + y \implies x \cdot \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} \right) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$$

diviene

$$\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \implies \frac{2 \ln x}{x} = 0$$

e quindi non è una identità. Il calcolo invece di

$$(d) \quad x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + \frac{2}{x} = y \implies x^2 \cdot \left(-\frac{3}{x^3} + \frac{2 \ln x}{x^3} \right) + x \cdot \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} \right) + \frac{2}{x} = \frac{\ln x}{x}$$

porta alla

$$-\frac{3}{x} + \frac{2 \ln x}{x} + \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} = \frac{\ln x}{x} \implies \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln x}{x},$$

per cui la funzione data è una soluzione della quarta equazione differenziale.

Quesito n. 5: soluzione. (testo del quesito)

L'equazione $\pi : x + y - z = 0$ rappresentativa del piano π per l'origine si può interpretare come il prodotto scalare del vettore

$$\vec{u} = (1, 1, -1) \quad \text{con il vettore} \quad \vec{OP} = (x - 0, y - 0, z - 0) = (x, y, z)$$

che individua, a partire dall'origine, un generico punto dello spazio. Poiché

$$\vec{u} \cdot \vec{OP} = 0,$$

i due vettori sono perpendicolari e quindi il punto P appartiene al piano π . La retta perpendicolare al piano π e passante per l'origine si può ottenere quindi a partire dalla forma parametrica espressa in forma vettoriale dalla

$$\vec{OP} = \vec{OA} + t \vec{u} \tag{1}$$

essendo $\vec{OA}$ un vettore che individua un punto A della retta e $\vec{u}$ un vettore parallelo ad essa. L'espressione (1) si esplicita nelle componenti

$$\begin{cases} x = x_A + t u_x \\ y = y_A + t u_y \\ z = z_A + t u_z \end{cases}$$

che nel nostro caso si particolarizza alle

$$\begin{cases} x = 0 + t \cdot 1 = t \\ y = 0 + t \cdot 1 = t \\ z = 0 + t(-1) = -t, \end{cases}$$

e tali equazioni costituiscono la rappresentazione parametrica della retta cercata. Volendo ricondurci anche alla forma implicita basta eliminare il parametro t per cui si ottiene la coppia di equazioni

$$\begin{cases} x = y \\ z = -x \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 0. \end{cases}$$

Quesito n. 6: soluzione. (testo del quesito)

La funzione assegnata

$$f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 + (x-5)^2 \quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

è, a dispetto delle apparenze, nient'altro che un polinomio di secondo grado per cui il suo grafico sarà rappresentato da una parabola. La concavità di questa parabola è rivolta verso l'alto (direzione positiva delle ordinate) in quanto il coefficiente del termine di II grado è positivo e pari a 5 ($x^2 + x^2 + x^2 + x^2 + x^2 = 5x^2$).

Comunque, anziché svolgere i quadrati per riportarla alla forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, calcoliamo direttamente la sua derivata prima

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-1) + 2(x-2) + 2(x-3) + 2(x-4) + 2(x-5) \\ &= 10x - 2 - 4 - 6 - 8 - 10 \\ &= 10x - 30 \end{aligned}$$

e ne studiamo il segno

$$f'(x) \geq 0 \quad \implies \quad 10x - 30 \geq 0 \quad \implies \quad x \geq 3,$$

rappresentato graficamente dalla fig. 1

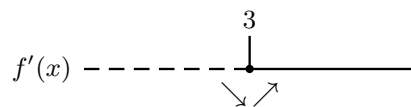


Fig. 1. Segno della $f'(x) = 10x - 30$.

La funzione $f(x)$ è pertanto decrescente per $x < 3$ e crescente per $x \geq 3$ e il valore minimo (assoluto) di $f(x)$ è raggiunto in corrispondenza di $x = 3$. Questo valore è, per quanto detto, pure l'ascissa del vertice, mentre la corrispondente ordinata si ottiene dalla sostituzione

$$\begin{aligned} f(3) &= (3-1)^2 + (3-2)^2 + (3-3)^2 + (3-4)^2 + (3-5)^2 \\ &= 4 + 1 + 0 + 1 + 4 = 10 : \end{aligned}$$

il vertice ha quindi coordinate $V(3, 10)$.

Quesito n. 7: soluzione. (testo del quesito)

Il poligono di n lati inscritto in un cerchio C è composto da n triangoli isosceli aventi le lunghezze dei lati obliqui pari al raggio r di C (fig. 1).

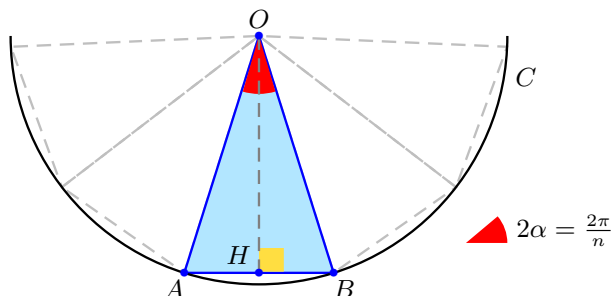


Fig. 1. Triangolo parte di un poligono regolare inscritto in C .

L'angolo al vertice è $\widehat{AOB} = 2\alpha = 2\pi/n$ e, detto H il piede dell'altezza rispetto alla base AB , l'area di ogni triangolo è

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \overline{AH} \cdot \overline{OH} = (\overline{AO} \sin \alpha) \cdot (\overline{AO} \cos \alpha) \\ &= (r \sin \alpha) \cdot (r \cos \alpha) \\ &= r^2 \sin \alpha \cos \alpha \\ &= \frac{1}{2} r^2 \sin 2\alpha = \frac{1}{2} r^2 \sin \left(\frac{2\pi}{n} \right)\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è utilizzata la formula di duplicazione del seno $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$. In alternativa più immediata si può invece utilizzare la formula

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \overline{AO} \cdot \overline{OB} \sin \widehat{AOB} \implies \mathcal{A} = \frac{1}{2} r^2 \sin \left(\frac{2\pi}{n} \right)$$

che esprime l'area come la metà del prodotto di due lati per il seno dell'angolo compreso. L'area totale $\mathcal{A}(n)$ del poligono è quindi

$$\mathcal{A}(n) = n \cdot \mathcal{A} = \frac{n}{2} r^2 \sin \left(\frac{2\pi}{n} \right)$$

come richiesto.

Il limite di $\mathcal{A}(n)$ per $n \rightarrow +\infty$ dovrà essere, evidentemente, l'area del cerchio. Difatti il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{r^2}{2} \cdot n \sin \left(\frac{2\pi}{n} \right) \right], \quad (1)$$

con il cambio di variabile seguente

$$t = \frac{2\pi}{n}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\pi}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} t = 0,$$

si può riscrivere come

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{r^2}{2} \cdot n \sin \left(\frac{2\pi}{n} \right) \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{r^2}{2} \cdot \frac{2\pi}{t} \sin t \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \pi r^2 \left(\frac{\sin t}{t} \right). \quad (2)$$

Poiché è noto il limite fondamentale

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1,$$

dalle (1) e (2) abbiamo in conclusione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(n) = \lim_{t \rightarrow 0} \pi r^2 \left(\frac{\sin t}{t} \right) = \pi r^2 \cdot 1 = \pi r^2.$$

Si veda per una procedura del tutto simile l'esame del 2007 (problema 2, punto 2) della precedente raccolta [ProblemiEsame.pdf](#).

Quesito n. 8: soluzione. (testo del quesito)

Con riferimento alla fig. 1, i dati forniti sono $\overline{AB} = \overline{AC} = 6$ cm e $\overline{BC} = 5$ cm, mentre il raggio delle tre circonferenze è $r = 2$ cm.

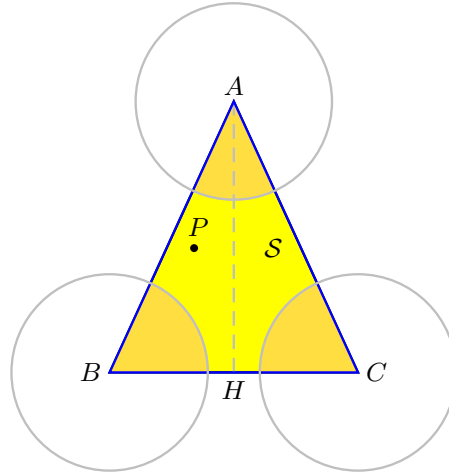


Fig. 1. Triangolo ABC .

Il punto P per aver distanze maggiori di 2 cm da ciascun vertice A, B, C , deve appartenere alla regione $\mathcal{S}$ di $\triangle ABC$ isoscele evidenziata in giallo nella fig. 1. L'area $\mathcal{A}$ di tale regione si ottiene sottraendo dall'area $\mathcal{A}(\triangle ABC)$ del triangolo, le aree dei tre settori circolari evidenziati in fig. 1 e che indichiamo richiamando il loro vertice come $\mathcal{A}_A, \mathcal{A}_B, \mathcal{A}_C$. Pertanto sarà

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\triangle ABC) - \mathcal{A}_A - \mathcal{A}_B - \mathcal{A}_C \quad (1)$$

e dato che $\triangle ABC$ è isoscele per cui sono uguali le aree dei settori relativi alla base $\mathcal{A}_B = \mathcal{A}_C$, l'area di $\mathcal{S}$ è data dalla

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\triangle ABC) - \mathcal{A}_A - 2\mathcal{A}_B = \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot \overline{AH} - \mathcal{A}_A - 2\mathcal{A}_B \quad (2)$$

con H piede dell'altezza rispetto alla base BC . Posto $\angle BAC = \alpha$, i due angoli di base sono espressi dalle

$$\angle ABC = \angle ACB = \frac{\pi - \alpha}{2}$$

e quindi, ricordata la formula per l'area di un settore individuato dall'angolo α e dal raggio r cioè $\frac{1}{2}\alpha r^2$, abbiamo che

$$\mathcal{A}_A = \frac{1}{2}\alpha r^2, \quad \mathcal{A}_B = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right)r^2.$$

Inseriti questi risultati in (2) otteniamo

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}(\triangle ABC) - \mathcal{A}_A - 2\mathcal{A}_B \\ &= \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{AH} - \frac{1}{2}\alpha r^2 - 2 \cdot \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right)r^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{AH} - \frac{1}{2}\alpha r^2 - \frac{\pi}{2}r^2 + \frac{1}{2}\alpha r^2 \\ &= \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{AH} - \frac{\pi}{2}r^2 \end{aligned} \quad (3)$$

per cui non è nemmeno necessario conoscere l'angolo α essendo sufficiente determinare in (3) l'unico elemento ancora incognito cioè la misura dell'altezza AH . Questa si deduce con il teorema di Pitagora ($\overline{BH} = \overline{BC}/2$),

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BH}^2} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{36 - \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{119}}{2} \text{ cm} \quad (4)$$

per cui l'area del triangolo è

$$\mathcal{A}(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{AH} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{119}}{2} = \frac{5}{4}\sqrt{119} \text{ cm}^2 \quad (5)$$

mentre quella cercata che discende dalle (3) e (5) è

$$\mathcal{A} = \frac{5}{4}\sqrt{119} - \frac{\pi}{2} \cdot (2)^2 = \left(\frac{5}{4}\sqrt{119} - 2\pi\right) \text{ cm}^2. \quad (6)$$

La probabilità p richiesta è data dal rapporto

$$p = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}},$$

rapporto che in tal caso è equivalente al rapporto delle aree

$$p = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}(\triangle ABC)} \quad (7)$$

in quanto il punto P viene scelto a caso all'interno del triangolo. Sostituendo i valori trovati in (5) e (6) otteniamo infine

$$p = \left(\frac{5}{4}\sqrt{119} - 2\pi \right) / \left(\frac{5}{4}\sqrt{119} \right) = 1 - \frac{8\pi}{5\sqrt{119}} \approx 0,5392.$$

Quesito n. 9: soluzione. (testo del quesito)

Perché il teorema di Lagrange sia applicabile alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - kx + k & 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad (1)$$

questa dev'essere continua in $[0, 2]$ e derivabile nei suoi punti interni cioè in $]0, 2[$. Data la continuità e derivabilità in $\mathbb{R}$ dei polinomi che costituiscono i suoi due rami, si può limitare lo studio al solo punto di contatto cioè in $x = 1$. Pertanto la f sarà continua se sono soddisfatte le uguaglianze

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = f(1)$$

che si esplicitano in

$$\lim_{x \rightarrow 1-} x^3 = f(1) = 1^3 = \lim_{x \rightarrow 1+} (x^2 - kx + k) = 1 - k + k = 1:$$

poiché queste uguaglianze sono soddisfatte $\forall k \in \mathbb{R}$, la funzione f è in corrispondenza sempre continua.

La funzione derivata prima $f'(x)$ si calcola facilmente

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - k, & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

e per la derivabilità in $]0, 2[$ va studiata la sua continuità nel punto $x = 1$. Procedendo quindi analogamente a quanto fatto per la $f(x)$,

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) = f'(1)$$

abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 1-} 3x^2 = 3 = f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1+} (2x - k) = 2 - k$$

per cui la derivata sinistra sarà uguale alla destra per il valore di k che soddisfa l'equazione $3 = 2 - k$ cioè per $k = -1$.

In alternativa, la derivabilità in $x = 1$ si può affrontare imponendo che esista e sia finito il limite del rapporto incrementale di $f(x)$: questo risulta

$$\lim_{h \rightarrow 0 \pm} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

e si suddivide nei due limiti

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(1+h)^3 - 1^3}{h} \quad (2)$$

e

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(1+h)^2 - k(1+h) + k - (1-k+k)}{h}. \quad (3)$$

Sviluppando il numeratore nel (2) e semplificando i termini comuni, abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} (1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 1) \\ = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} (3h + 3h^2 + h^3) \\ = \lim_{h \rightarrow 0^-} (3 + 3h + h^2) = 3, \end{aligned}$$

mentre in (3)

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} (1 + 2h + h^2 - k - kh + k - 1) \\ = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [(2-k)h + h^2] \\ = \lim_{h \rightarrow 0^+} (2 - k + h) = 2 - k \end{aligned}$$

per cui, imponendo l'uguaglianza dei due limiti, $3 = 2 - k$, si giunge al medesimo risultato. La funzione cui applicare il teorema è quindi

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 + x - 1 & 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad (4)$$

con derivata prima

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x + 1, & \text{se } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Il teorema assicura che esista almeno un valore $x \in]0, 2[$ tale che valga

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = f'(x).$$

Questa condizione si suddivide in

$$\frac{(4 + 2 - 1) - 0^3}{2} = 3x^2, \quad \text{se } 0 \leq x \leq 1 \quad (5)$$

oppure in

$$\frac{(4 + 2 - 1) - 0^3}{2} = 2x + 1, \quad \text{se } 1 < x \leq 2. \quad (6)$$

La prima si riduce all'equazione

$$\frac{5}{2} = 3x^2 \implies x^2 = \frac{5}{6} \implies x = \pm \sqrt{\frac{5}{6}}$$

e risulta accettabile solo il valore

$$x = \sqrt{\frac{5}{6}} \quad \text{in quanto appartenente a }]0, 1[.$$

Il caso (6) conduce all'equazione

$$\frac{5}{2} = 2x + 1 \implies \frac{5}{2} - 1 = 2x \implies x = \frac{3}{4}$$

ma non essendo appartenente all'intervallo $]1, 2[$ non risulta accettabile.

Quesito n. 10: soluzione. (testo del quesito)

La funzione $y = f(x) = \sqrt{x}$ per $x \geq 0$ è rappresentata in un piano cartesiano Oxy da un arco Γ di parabola nel I quadrante (fig. 1). In particolare, il punto $C(4, 2)$ è, non solo un vertice del rettangolo, ma pure un punto di Γ : i restanti vertici del rettangolo sono i punti $A(1, 0)$, $B(4, 0)$ e $D(1, 4)$.

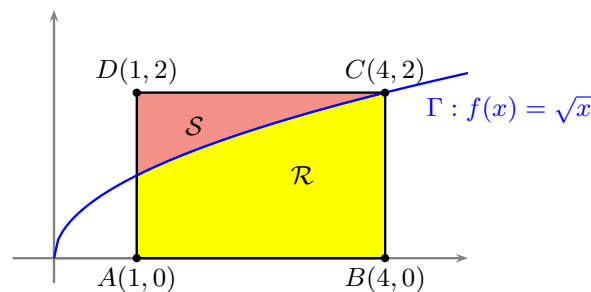


Fig. 1. Funzione $f(x) = \sqrt{x}$ e regioni $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$.

Tale rettangolo, di area

$$\mathcal{A} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = (4 - 1) \cdot 2 = 6 \quad (1)$$

è diviso dal grafico Γ in due regioni $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ (fig. 1). Per determinarne le rispettive aree è sufficiente calcolare quella del trapezoide $\mathcal{R}$ che è data dall'integrale definito

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}) = \int_1^4 \sqrt{x} \, dx. \quad (2)$$

Poiché l'integrale indefinito corrispondente fornisce le primitive

$$\int \sqrt{x} \, dx = \int x^{1/2} \, dx = \frac{x^{3/2}}{(3/2)} + c = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c,$$

l'integrale definito (2) si risolve in

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}) = \int_1^4 \sqrt{x} \, dx = \left[\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \right]_1^4 = \frac{2}{3} (\sqrt{4^3} - \sqrt{1^3}) = \frac{2}{3} (8 - 1) = \frac{14}{3}. \quad (3)$$

Pertanto, per i risultati (1) e (3), l'area della regione $\mathcal{S}$ è

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \mathcal{A} - \mathcal{A}(\mathcal{R}) = 6 - \frac{14}{3} = \frac{4}{3}$$

e il loro rapporto è

$$\frac{\mathcal{A}(\mathcal{R})}{\mathcal{A}(\mathcal{S})} = \frac{14}{3} : \frac{4}{3} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}.$$

ESAME 2016

Il candidato risolve uno dei due problemi e risponde a 5 quesiti del questionario.

• Problema n. 1

L'amministratore di un piccolo condominio deve installare un nuovo serbatoio per il gasolio da riscaldamento. Non essendo soddisfatto dei modelli esistenti in commercio, ti incarica di progettare uno che risponda alle esigenze del condominio.

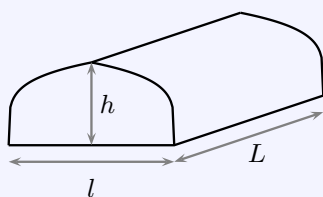


Figura 1

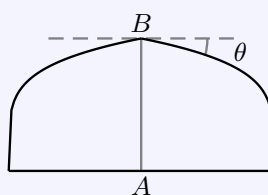


Figura 2

Allo scopo di darti le necessarie informazioni, l'amministratore ti fornisce il disegno in figura 1, aggiungendo le seguenti indicazioni:

- la lunghezza L del serbatoio deve essere pari a otto metri;
- la larghezza l del serbatoio deve essere pari a due metri;
- l'altezza h del serbatoio deve essere pari a un metro;
- il profilo laterale (figura 2) deve avere un punto angoloso alla sommità, per evitare l'accumulo di ghiaccio durante i mesi invernali, con un angolo $\theta \geq 10^\circ$;
- la capacità del serbatoio deve essere pari ad almeno 13 m^3 , in modo da garantire al condominio il riscaldamento per tutto l'inverno effettuando solo due rifornimenti di gasolio;
- al centro della parete laterale del serbatoio, lungo l'asse di simmetria (segmento AB in figura 2) deve essere installato un indicatore graduato che riporti la percentuale di riempimento V del volume del serbatoio in corrispondenza del livello z raggiunto in altezza dal gasolio.

1. Considerando come origine degli assi cartesiani il punto A in figura 2, individua tra le seguenti famiglie di funzioni quella che meglio può descrivere il profilo laterale del serbatoio per $x \in [-1, 1]$, k intero positivo, motivando opportunamente la tua scelta:

$$f(x) = (1 - |x|)^{\frac{1}{k}}$$

$$f(x) = -6|x|^3 + 9kx^2 - 4|x| + 1$$

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x^k\right)$$

2. Determina il valore di k che consente di soddisfare i requisiti richiesti relativamente all'angolo θ e al volume del serbatoio.

3. Al fine di realizzare l'indicatore graduato, determina l'espressione della funzione $V(z)$ che associa al livello z del gasolio (in metri) la percentuale di riempimento V del volume da riportare sull'indicatore stesso.

Quando consegni il tuo progetto, l'amministratore obietta che essendo il serbatoio alto un metro, il valore z del livello di gasolio, espresso in centimetri, deve corrispondere alla percentuale di riempimento: cioè, ad esempio, se il gasolio raggiunge un livello z pari a 50 cm vuol dire che il serbatoio è pieno al 50%; invece il tuo indicatore riporta, in corrispondenza del livello 50 cm, una percentuale di riempimento 59,7%.

4. Illustra gli argomenti che puoi usare per spiegare all'amministratore che il suo ragionamento è sbagliato; mostra anche qual è, in termini assoluti, il massimo errore che si commette usando il livello z come indicatore della percentuale di riempimento, come da lui suggerito, e qual è il valore di z in corrispondenza del quale esso si verifica.

Soluzione

• Problema n. 2

Nella figura 1 è rappresentato il grafico Γ della funzione continua $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile in $]0, +\infty)$, e sono indicate le coordinate di alcuni suoi punti.

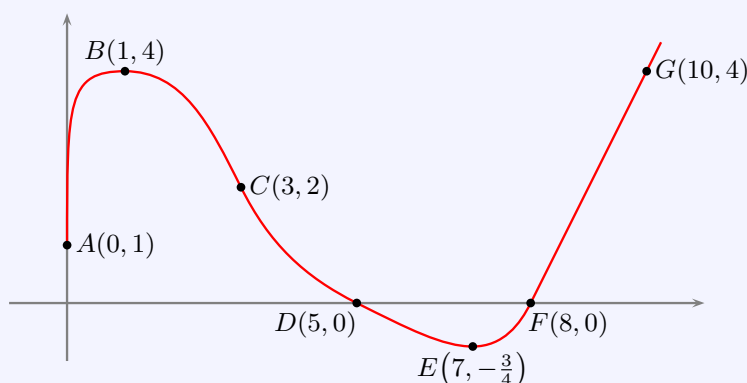


Figura 1

È noto che Γ è tangente all'asse y in A , che B ed E sono un punto di massimo e uno di minimo, che C è un punto di flesso con tangente di equazione $2x + y - 8 = 0$.

Nel punto D la retta tangente ha equazione $x + 2y - 5 = 0$ e per $x \geq 8$ il grafico consiste in una semiretta passante per il punto G . Si sa inoltre che l'area della regione delimitata dall'arco $ABCD$, dall'asse x e dall'asse y vale 11, mentre l'area della regione delimitata dall'arco DEF e dall'asse x vale 1.

1. In base alle informazioni disponibili, rappresenta indicativamente i grafici delle funzioni

$$y = f'(x)$$

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Quali sono i valori di $f'(3)$ e $f'(5)$? Motiva la tua risposta.

2. Rappresenta, indicativamente, i grafici delle seguenti funzioni:

$$y = |f'(x)|$$

$$y = |f(x)|'$$

$$y = \frac{1}{f(x)}$$

specificando l'insieme di definizione di ciascuna di esse.

3. Determina i valori medi di $y = f(x)$ e di $y = |f(x)|$ nell'intervallo $[0, 8]$, il valore medio di $y = f'(x)$ nell'intervallo $[1, 7]$ e il valore medio di $y = F(x)$ nell'intervallo $[9, 10]$.
4. Scrivi le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione $F(x)$ nei suoi punti di ascisse 0 e 8, motivando le risposte.

Soluzione

Questionario

1. È noto che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Stabilire se il numero reale u , tale che

$$\int_{-\infty}^u e^{-x^2} dx = 1$$

è positivo oppure negativo. Determinare inoltre i valori dei seguenti integrali, motivando le risposte:

$$A = \int_{-u}^u x^7 e^{-x^2} dx \quad B = \int_{-u}^u e^{-x^2} dx \quad C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2} dx.$$

Soluzione

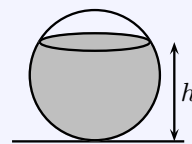
2. Data una parabola di equazione

$$y = 1 - ax^2, \quad \text{con } a > 0$$

si vogliono inscrivere dei rettangoli, con un lato sull'asse x , nel segmento parabolico delimitato dall'asse x . Determinare a in modo tale che il rettangolo di area massima sia anche il rettangolo di perimetro massimo.

Soluzione

3. Un recipiente sferico con raggio interno r è riempito con un liquido fino all'altezza h . Utilizzando il calcolo integrale, dimostrare che il volume del liquido è dato da: $V = \pi \cdot \left(rh^2 - \frac{h^3}{3} \right)$.



Soluzione

4. Un test è costituito da 10 domande a risposta multipla, con 4 possibili risposte di cui solo una è esatta. Per superare il test occorre rispondere esattamente almeno a 8 domande. Qual è la probabilità di superare il test rispondendo a caso alle domande?

Soluzione

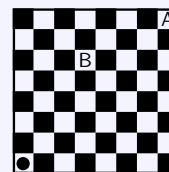
5. Una sfera, il cui centro è il punto $K(-2, -1, 2)$, è tangente al piano Π avente equazione $2x - 2y + z - 9 = 0$. Qual è il punto di tangenza? Qual è il raggio della sfera?

Soluzione

6. Si stabilisca se la seguente affermazione è vera o falsa, giustificando la risposta: "Esiste un polinomio $P(x)$ tale che: $|P(x) - \cos(x)| \leq 10^{-3}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ".

Soluzione

7. Una pedina è collocata nella casella in basso a sinistra di una scacchiera, come in figura. Ad ogni mossa, la pedina può essere spostata o nella casella alla sua destra o nella casella sopra di essa. Scelto casualmente un percorso di 14 mosse che porti la pedina nella casella d'angolo opposta A , qual è la probabilità che essa passi per la casella indicata con B ?



Soluzione

8. Data la funzione $f(x)$ definita in $\mathbb{R}$, $f(x) = e^x(2x + x^2)$, individuare la primitiva di $f(x)$ il cui grafico passa per il punto $(1, 2e)$.

Soluzione

9. Date le rette:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

e il punto $P(1, 0, -2)$ determinare l'equazione del piano passante per P e parallelo alle due rette.

Soluzione

10. Sia f la funzione così definita nell'intervallo $]1, +\infty)$:

$$f(x) = \int_e^{x^2} \frac{t}{\ln t} dt.$$

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa $\sqrt{e}$.

Soluzione

Problema n. 1: soluzione. (testo del problema)

1. Riassumiamo i dati del problema associandoli alla proiezione assonometrica del serbatoio (fig. 1) e alla sua sezione piana (fig. 2) inserita in un sistema cartesiano con l'unità corrispondente ad 1 m, e iniziamo l'analisi della compatibilità tra le funzioni assegnate e i dati forniti dal testo.

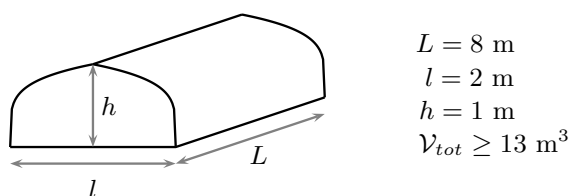


Fig. 1. Serbatoio e dimensioni.

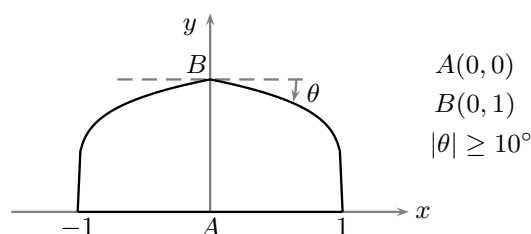


Fig. 2. Sezione del serbatoio e sistema di riferimento.

- La prima funzione è rappresentata dalle condizioni

$$f(x) = (1 - |x|)^{1/k} \quad x \in [-1, 1], \quad k \in \mathbb{N} \quad (1)$$

per cui $|x| \leq 1$ e $k \geq 1$. Questa funzione è evidentemente simmetrica pari in quanto soddisfa l'identità

$$f(-x) = (1 - |-x|)^{1/k} = (1 - |x|)^{1/k} = f(x), \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Inoltre si annulla agli estremi del dominio $f(\pm 1) = 0$ e assume il valore $f(0) = 1^{1/k} = 1$ compatibile con le dimensioni assegnate.

Poiché dalla fig. 2 il profilo del serbatoio nei punti di ascissa ± 1 (tralasciamo per ora l'unità di misura) appare verticale, la funzione f non dovrà essere derivabile in tali punti. Per analizzare tale punto conviene riscrivere la funzione come

$$f : \begin{cases} (1-x)^{1/k}, & 0 \leq x \leq 1 \\ (1+x)^{1/k}, & -1 \leq x < 0 \end{cases} \quad (2)$$

per cui il calcolo della derivata di ciascuno dei due tratti componenti la funzione comporta

$$\begin{aligned} D[(1-x)^{1/k}] &= \frac{1}{k}(1-x)^{\frac{1}{k}-1} \cdot (-1) = -\frac{1}{k}(1-x)^{(1-k)/k} \\ D[(1+x)^{1/k}] &= \frac{1}{k}(1+x)^{\frac{1}{k}-1} = \frac{1}{k}(1+x)^{(1-k)/k} \end{aligned}$$

cosicché la funzione f' risulta

$$f' : \begin{cases} -\frac{1}{k}(1-x)^{(1-k)/k}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{k}(1+x)^{(1-k)/k}, & -1 \leq x < 0. \end{cases} \quad (3)$$

Poiché $k \geq 1$, è pure $\frac{1-k}{k} < 0$ e quindi il limite della f' per $x \rightarrow 1^-$ risulta

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(-\frac{1}{k}(1-x)^{(1-k)/k} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[-\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{(1-x)^{(k-1)/k}} \right] = -\infty$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{(k-1)/k} = (1-1)^{(k-1)/k} = 0^+.$$

Gli elementi finora raccolti sono quindi coerenti con il profilo descritto: in particolare il valore della derivata destra in $x = 0$ è, dalla prima equazione di (3)

$$f'_+(0) = -\frac{1}{k}(1-0)^{(1-k)/k} = -\frac{1}{k} \quad (4)$$

e tale valore rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente nell'intorno, appunto, destro del punto angoloso $x = 0$.

• La seconda funzione

$$f(x) = -6|x|^3 + 9kx^2 - 4|x| + 1$$

è pure simmetrica pari, $f(-x) = f(x)$, soddisfa la condizione $f(0) = 1$ mentre, perché sia $f(\pm 1) = 0$, dev'essere

$$f(\pm 1) = -6 + 9k - 4 + 1 = 0 \implies k = 1.$$

Pertanto per $0 \leq x \leq 1$ è $f(x) = -6x^3 + 9x^2 - 4x + 1$ ma tale funzione presenta una derivata prima, $f'(x) = -18x^2 + 18x - 4$ che, in $x = 1$, assume il valore finito $f'(1) = -18 + 18 - 4 = -4$ incompatibile con il profilo verticale già evidenziato in $x = 1$.

- La terza funzione, $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x^k\right)$ soddisfa le condizioni

$$f(0) = \cos\left(\frac{\pi}{2}0^k\right) = \cos 0 = 1$$

$$f(\pm 1) = \cos\left[\frac{\pi}{2}(\pm 1)^k\right] = \cos\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

mentre la sua derivata prima è

$$f'(x) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x^k\right) \cdot \frac{\pi}{2}k \cdot x^{k-1} = -\frac{k\pi}{2} \cdot x^{k-1} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x^k\right).$$

Da tale espressione discende che

$$f'(0) = -\frac{k\pi}{2} \cdot 0^{k-1} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}0^k\right) = 0 \quad (5)$$

e quindi tale funzione non può soddisfare la condizione sull'angolo $\theta \geq 10^\circ$ in quanto il risultato (5) implicherebbe un angolo $\theta = 0^\circ$ anziché $\theta \geq 10^\circ$.

2. Individuata la funzione (1) come quella più idonea a descrivere il profilo del serbatoio e ricordato come il coefficiente angolare m di una retta sia anche uguale alla tangente goniometrica dell'angolo orientato θ che la retta medesima definisce con il semiasse positivo delle x , cioè $m = \operatorname{tg} \theta$, in riferimento alla figura 2, il coefficiente m della (retta) tangente destra in $x = 0$ deve soddisfare alla relazione

$$|\theta| \geq 10^\circ \implies \operatorname{tg} |\theta| \geq \operatorname{tg} 10^\circ \implies |m| \geq \operatorname{tg} 10^\circ \quad (6)$$

dove la prima implicazione si giustifica osservando come la tangente nell'intervallo angolare $[0^\circ, 90^\circ[$ sia una funzione strettamente crescente.

D'altra parte, la derivata destra in $x = 0$ è, come visto in (4), $f'_+(0) = -\frac{1}{k}$ e poiché questa rappresenta pure il coefficiente angolare della retta tangente, poniamo

$$-\frac{1}{k} = \operatorname{tg} \theta = m.$$

Osservato che $\theta < 0$ (fig. 2) e quindi pure $m = \operatorname{tg} \theta < 0$, la condizione (6) si riscrive come

$$\frac{1}{k} \geq \operatorname{tg} 10^\circ$$

dalla quale discende per il parametro k

$$k \leq \frac{1}{\operatorname{tg} 10^\circ},$$

e in termini numerici

$$k \leq \frac{1}{0,1763} \implies k \leq 5,6713.$$

I possibili valori interi di k potranno quindi essere

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}. \quad (7)$$

Per soddisfare la condizione sulla capacità del serbatoio calcoliamo il volume utilizzando la formula

$$\mathcal{V} = \int_a^b \mathcal{A}(x) dx \quad (8)$$

dove $\mathcal{A}(x)$ indica l'area di una sezione del solido perpendicolare all'asse x . Nel caso in esame le sue sezioni sono dei rettangoli (fig. 3) aventi altezza $y = (1 - x)^{1/k}$ e lunghezza della base pari a $L = 8$ m.

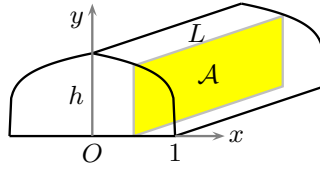


Fig. 3. Sezioni piane del serbatoio.

Segue che

$$\mathcal{A}(x) = L \cdot (1 - x)^{1/k}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

e il volume totale è, per simmetria,

$$\mathcal{V} = 2 \cdot \int_0^1 L(1 - x)^{1/k} dx. \quad (9)$$

Posto $t = 1 - x$ e quindi $dt = -dx$ cioè $dx = -dt$, l'integrale indefinito associato alla (9) diviene

$$\int (1 - x)^{1/k} dx = \int t^{1/k} \cdot (-dt) = -\int t^{1/k} dt$$

che rientra tra gli integrali elementari

$$-\int t^{1/k} dt = -\frac{t^{(1/k)+1}}{(\frac{1}{k} + 1)} + c = -\frac{(1 - x)^{(1/k)+1}}{(\frac{1}{k} + 1)} + c. \quad (10)$$

Il volume totale del serbatoio (9) è di conseguenza

$$\mathcal{V}_{tot} = 2L \cdot \left[-\frac{(1 - x)^{(1/k)+1}}{(\frac{1}{k} + 1)} \right]_0^1 = 2L \left[0 + \frac{1}{(\frac{1}{k} + 1)} \right] = \frac{2L}{(\frac{1+k}{k})} = \frac{2kL}{1+k}$$

cioè

$$\mathcal{V}_{tot} = \frac{16k}{1+k}. \quad (11)$$

Dovendo essere $\mathcal{V}_{tot} \geq 13 \text{ m}^3$, abbiamo

$$\frac{16k}{1+k} \geq 13 \implies 16k \geq 13 + 13k \implies 3k \geq 13 \implies k \geq \frac{13}{3}$$

ossia, approssimativamente, $k \geq 4,33$. Tra i possibili valori di k , (7), solo $k = 5$ soddisfa entrambe le condizioni del testo e pertanto la funzione che descrive il profilo sarà

$$f(x) = y = (1 - |x|)^{1/5}. \quad (12)$$

Tale valore comporta un volume complessivo pari a

$$\mathcal{V}_{tot} = \frac{16 \cdot 5}{1 + 5} = \frac{40}{3} \approx 13,3 \text{ m}^3. \quad (13)$$

3. Determiniamo innanzitutto la funzione $\mathcal{V}(z)$ cioè il volume del gasolio in funzione del suo livello z . Possiamo a tal fine suddividere la sezione del serbatoio corrispondente alle ascisse positive in due regioni $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ (fig. 4) che, assieme alla profondità L danno origine a due solidi di volume rispettivamente $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$.

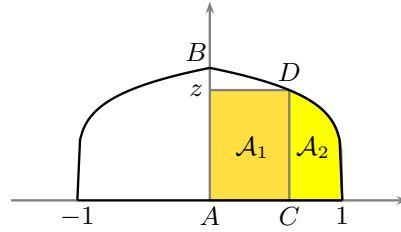


Fig. 4. Sezione del serbatoio e regioni.

Se D è il punto del profilo di ordinata z e C il punto dell'asse x avente la medesima ascissa di D (fig. 4), $x_C = x_D$, il volume $\mathcal{V}_1$ è quello di un parallelepipedo di profondità L e area

$$\mathcal{A}_1(z) = \overline{AC} \cdot \overline{CD} = \overline{AC} \cdot z = x_C \cdot z.$$

L'ascissa comune di C e D si ottiene risolvendo l'equazione $z = (1 - x)^{1/5}$ per cui, elevando entrambi i membri alla potenza 5,

$$z^5 = 1 - x \quad \implies \quad x_C = x_D = 1 - z^5. \quad (14)$$

Il volume del parallelepipedo è pertanto

$$\mathcal{V}_1(z) = L \cdot \mathcal{A}_1(z) = L \cdot (1 - z^5) \cdot z. \quad (15)$$

Il secondo contributo è collegato al solido discusso precedentemente ma, in questo caso, le sue sezioni piane rettangolari e perpendicolari all'asse x avranno ascisse comprese nell'intervallo $[x_C, 1]$. Ripresa quindi la formula (8) e notato che l'area della sezione rettangolare è semplicemente $L \cdot z = L(1 - x)^{1/5}$, risulta

$$\mathcal{V}_2(z) = \int_{x_C}^1 L(1 - x)^{1/5} dx.$$

Dato il risultato (10) discende

$$\mathcal{V}_2(z) = L \left[-\frac{(1 - x)^{(1/5)+1}}{(\frac{1}{5} + 1)} \right]_{x_C}^1 = L \left[0 + \frac{(1 - x_C)^{(1/5)+1}}{(\frac{1}{5} + 1)} \right]$$

e per la (14) diviene

$$\mathcal{V}_2(z) = L \left[0 + \frac{(1 - 1 + z^5)^{6/5}}{6/5} \right] = \frac{L \cdot z^6}{6/5} = \frac{5}{6} L z^6.$$

Considerando la simmetria del serbatoio rispetto all'asse y il volume del liquido in funzione dell'altezza z è quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(z) &= 2 [\mathcal{V}_1(z) + \mathcal{V}_2(z)] = 2 \left[L(1 - z^5) \cdot z + \frac{5}{6} L z^6 \right] \\ &= 2L \left(z - z^6 + \frac{5}{6} z^6 \right) \\ &= 16 \left(z - \frac{1}{6} z^6 \right) \end{aligned} \quad (16)$$

per cui, richiamata la (13), la percentuale di riempimento cioè la funzione $V(z)$ richiesta è,

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{\mathcal{V}(z)}{\mathcal{V}_{tot}} \cdot 100 = \left[16 \left(z - \frac{1}{6} z^6 \right) \cdot 100 \right] : \frac{40}{3} \\ &= 120 \left(z - \frac{1}{6} z^6 \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Se $z = 50 \text{ cm} = 0,5 \text{ m}$, dalla precedente risulta

$$V(0,5) = 120 \left(0,5 - \frac{1}{6} 0,5^6 \right) \approx 59,6875\%$$

in coerenza con quanto dichiarato nel testo.

In alternativa al procedimento seguito per determinare il volume $\mathcal{V}(z)$ spezzandolo in una somma di due contributi, si può giungere al risultato (16) col considerare l'area di sezioni perpendicolari all'asse y e quindi procedendo all'integrazione tramite la (8) ma considerando come variabile indipendente la y (fig. 5).

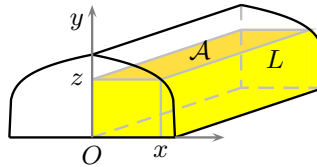


Fig. 5. Sezioni piane orizzontali di metà serbatoio.

In tal caso dobbiamo invertire la funzione (12) elevando alla quinta potenza entrambi i membri

$$y = (1 - x)^{1/5} \implies y^5 = 1 - x \implies x = 1 - y^5.$$

L'area della sezione di metà serbatoio è quindi $\mathcal{A}(y) = L \cdot x = L(1 - y^5)$ per cui se z è l'altezza del liquido, il volume totale è dato dalla

$$\mathcal{V}(z) = 2 \int_0^z \mathcal{A}(y) dy = 2 \int_0^z L(1 - y^5) dy = 2L \left[y - \frac{y^6}{6} \right]_0^z = 16 \left(z - \frac{z^6}{6} \right)$$

che coincide con l'espressione (16) già trovata.

4. La funzione suggerita dall'amministratore e che intende rappresentare la percentuale è invece

$$V'(z) = 100 \cdot z \quad \text{con } z \text{ espresso in metri.}$$

Difatti, l'amministratore considera erroneamente il serbatoio come un parallelepipedo di volume

$$V'_{tot} = \text{larghezza} \times \text{altezza} \times \text{profondità} = 2 \times 1 \times 8 = 16 \text{ m}^3$$

per cui, se il livello di riempimento è z , allora $V'_z = 2 \times z \times 8 = 16z$, cosicché la percentuale di riempimento diviene appunto

$$V'(z) = \frac{V'_z}{V'_{tot}} \cdot 100 = \frac{16z}{16} \cdot 100 = 100z. \quad (18)$$

Ma il serbatoio non è un parallelepipedo e si differenzia da questo tanto maggiore è z . Matematicamente significa che per valori di z prossimi ad 1 m il termine di sesto grado in (17) assume sempre più importanza. L'errore che si commette considerando la proposta $V'(z)$ dell'amministratore è, in valore assoluto, espresso da

$$\begin{aligned} \text{err}(z) &= |V'(z) - V(z)| = \left| 100z - 120 \left(z - \frac{1}{6}z^6 \right) \right| \\ &= |100z - 120z + 20z^6| = |20z^6 - 20z| \\ &= 20|z(z^5 - 1)| \end{aligned}$$

che, con la condizione $0 \leq z \leq 1$ diviene

$$\text{err}(z) = 20z(1 - z^5) = 20(z - z^6), \quad 0 \leq z \leq 1. \quad (19)$$

Il massimo di tale funzione si deduce dallo studio del segno della derivata prima

$$\text{err}'(z) = 20(1 - 6z^5) \geq 0$$

cioè

$$1 - 6z^5 \geq 0, \quad \implies \quad z^5 \leq \frac{1}{6} \quad \implies \quad z \leq \frac{1}{\sqrt[5]{6}}.$$

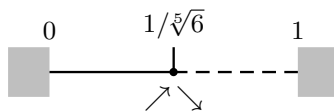


Fig. 6. Segno di $\text{err}'(z)$.

Graficamente (fig. 6) tale segno mostra che $\text{err}(z)$ raggiunge un massimo in corrispondenza di $z_{max} = 1/\sqrt[5]{6} \approx 0,6988$ (e perciò l'altezza del gasolio è di 70 cm) cosicché l'errore percentuale che ne discende dalla (19) ammonta a

$$\begin{aligned} \text{err}(z_{max}) &= 20 \left[z_{max} - (z_{max})^6 \right] = 20 \left(\frac{1}{\sqrt[5]{6}} - \frac{1}{\sqrt[5]{6^6}} \right) \\ &= 20 \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{6}} \cdot \left(1 - \frac{1}{6} \right) \\ &= \frac{50}{3\sqrt[5]{6}} \approx 11,65\%. \end{aligned}$$

Problema n. 2: soluzione. (testo del problema)

Il grafico Γ della funzione $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ riportato nella fig. 1 riassume, per quanto possibile, le condizioni del testo che, di seguito, traduciamo in relazioni coinvolgenti la funzione f e le sue derivate.

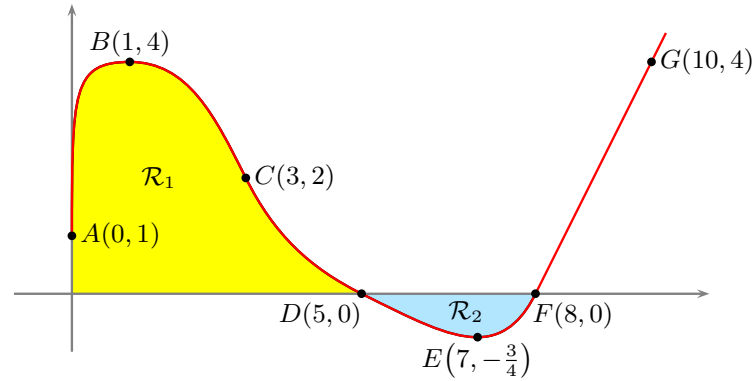


Fig. 1. Grafico Γ della funzione f .

- Se quindi Γ è tangente all'asse y in $A(0, 1)$ significa che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty. \quad (1)$$

Inoltre l'analisi visiva di Γ suggerisce l'esistenza delle rette tangenti in tutti i suoi punti come d'altra parte dichiarato dal testo: pertanto è assicurata l'esistenza della derivata prima $f'(x)$ nell'insieme $(0, +\infty)$.

- Nel punto di massimo relativo $B(1, 4)$ dev'essere

$$f'(1) = 0, \quad \text{così come} \quad f'(7) = 0 \quad (2)$$

dato che $E(7, -\frac{3}{4})$ è punto di minimo.

- Essendo $C(3, 2)$ punto di flesso nel quale la retta tangente possiede equazione $t_C: y = -2x + 8$, dovranno valere le condizioni

$$f'(3) = D(-2x + 8) = -2 \quad \wedge \quad f''(3) = 0. \quad (3)$$

- La retta tangente in $D(5, 0)$ è $t_D: y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ per cui

$$f'(5) = -\frac{1}{2}. \quad (4)$$

- L'equazione della semiretta di origine $F(8, 0)$ e passante per $G(10, 4)$ si deduce considerando le coordinate di tali punti come soluzioni dell'equazione $y = mx + q$. Ne discende il sistema

$$\begin{cases} 4 = 10m + q \\ 0 = 8m + q \end{cases} \implies q = -8m \implies 4 = 10m - 8m \implies 4 = 2m$$

da cui $m = 2 \wedge q = -16$. Pertanto quando $x \geq 8$ la f è rappresentata dalla $y = 2x - 16$: quindi non solo risulta $f'(8) = D(2x - 16) = 2$ ma pure $f'(x) = 2$ quando $x > 8$: in sintesi

$$f(x) = 2x - 16 \quad \wedge \quad f'(x) = 2 \quad \text{se} \quad x \geq 8. \quad (5)$$

• Il valore dell'area della regione $\mathcal{R}_1$ (fig. 1) implica la condizione

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}_1) = \int_0^5 f(t) dt = 11, \quad (6)$$

mentre la regione $\mathcal{R}_2$ (fig. 1) soddisfa alla

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}_2) = -\int_5^8 f(t) dt = 1 \quad (7)$$

in quanto per $x \in (5, 8)$ (oppure, con altra notazione, $]5, 8[$) è $f(x) < 0$.

1. Da quanto precede e circa il possibile grafico di $f'(x)$ sappiamo che questo dovrà presentare, per la (1), l'asintoto verticale $x = 0$ e, a partire dall'intorno destro di zero l'inclinazione delle rette tangenti a Γ appare diminuire per cui altrettanto farà $f'(x)$ fino ad assumere in $x = 1$, per la condizione (2), il valore nullo $f'(1) = 0$.

Per $1 < x < 3$, $f'(x)$ continua a diminuire (in segno) in quanto la sua derivata prima, cioè $f''(x)$, è manifestamente negativa nell'intervallo $x \in (0, 3)$ mostrando Γ una concavità rivolta verso il basso. Le due condizioni riassunte dalla (3) nel punto di ascissa 3 individuano invece un valore estremo di f' dato che nell'intorno destro di 3 il grafico Γ rivolge la concavità verso l'alto e $f''(x) > 0$. In fig. 2 è rappresentato il segno di f'' che mostra come $x = 3$ sia l'ascissa di un minimo per la funzione derivata prima.

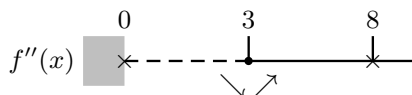


Fig. 2. Segno di $f''(x)$.

Successivamente $f(x)$ è crescente assumendo via via i valori $f'(5) = -\frac{1}{2}$, $f'(7) = 0$ e $f'(8) = 2$. Le condizioni (5) implicano infine la costanza di $f'(x) = 2$ per $x \geq 8$. Per $x = 8$ non esiste invece $f''(8)$ in quanto $f'(x)$ presenta un punto angoloso. Un grafico coerente con quanto notato finora è rappresentato in fig. 3.

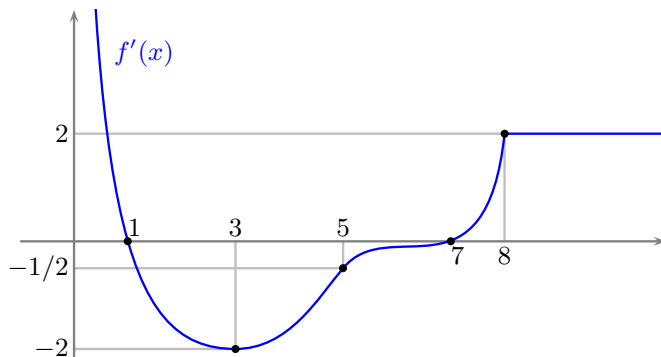


Fig. 3. Un possibile grafico della funzione $f'(x)$.

Per la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad (8)$$

abbiamo che $F(0) = 0$ mentre per $0 < x < 5$, $F(x)$ è crescente in quanto la sua derivata, cioè $F'(x) = f(x)$ risulta positiva. In particolare il segno di $F'(x)$ è sintetizzato dalla fig. 4 che mette in evidenza la presenza di,

a) un massimo in corrispondenza di $x = 5$ dove $F(5) = 11$ in quanto area della regione $\mathcal{R}_1$ di fig. 1;

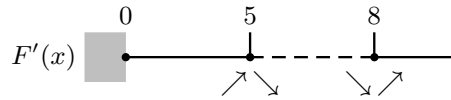


Fig. 4. Segno di $F'(x) = f(x)$.

b) un minimo in $x = 8$ rappresentato da

$$F(8) = \int_0^8 f(t) dt$$

che, per la proprietà additiva dell'integrale definito, assume il valore (condizioni (6), (7))

$$\begin{aligned} F(8) &= \int_0^8 f(t) dt = \int_0^5 f(t) dt + \int_5^8 f(t) dt \\ &= \mathcal{A}(\mathcal{R}_1) - \mathcal{A}(\mathcal{R}_2) = 11 - 1 = 10. \end{aligned} \quad (9)$$

Successivamente, per $x \geq 8$, $F(x)$ è crescente: in particolare, sempre per la proprietà additiva, la $F(x)$ si può scomporre in

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^8 f(t) dt + \int_8^x f(t) dt \quad x \geq 8$$

per cui, ripreso il risultato precedente e la semiretta $y = 2x - 16$, si ha

$$\begin{aligned} F(x) &= 10 + \int_8^x (2t - 16) dt = 10 + 2 \int_8^x t dt - 16 \int_8^x dt \\ &= 10 + 2 \left[\frac{t^2}{2} \right]_8^x - 16 [t]_8^x = 10 + x^2 - 64 - 16x + 16 \cdot 8 \\ &= x^2 - 16x + 74 \quad x \geq 8 \end{aligned} \quad (10)$$

Quest'ultima equazione rappresenta l'arco di una parabola avente vertice in $V(8, 10)$ e concavità rivolta nel verso delle ordinate positive. Da ciò segue pure l'andamento asintotico della $F(x)$ e riassunto dal limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty.$$

Infine poiché $F''(x) = f'(x)$ e quindi valgono le relazioni

$$F''(1) = f'(1) = 0 = F''(7) = f'(7),$$

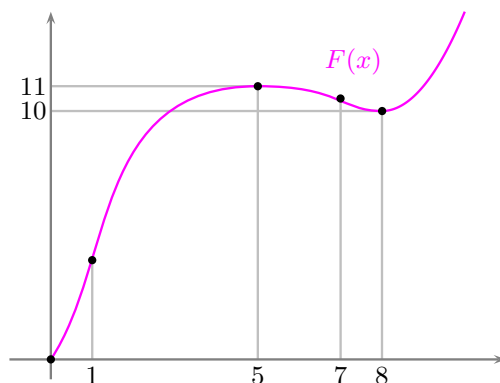


Fig. 5. Un possibile grafico della funzione $F(x)$ (sistema non isometrico).

la funzione integrale presenterà in $x = 1$ e $x = 7$ dei punti di flesso. Un grafico indicativo di tale funzione è riportato in fig. 5.

2. Poiché

$$y_1 = |f'(x)| = \begin{cases} f'(x), & \text{se } f'(x) \geq 0, \\ -f'(x), & \text{se } f'(x) < 0, \end{cases}$$

il suo grafico coincide con quello studiato per $x \in (0, 1] \cup [7, +\infty)$, fig. 3, mentre quando $f'(x) < 0$ cioè $x \in (1, 7)$ lo si ottiene considerando il simmetrico di $f'(x)$ rispetto all'asse x . Risulta quindi rappresentato dalla fig. 6.

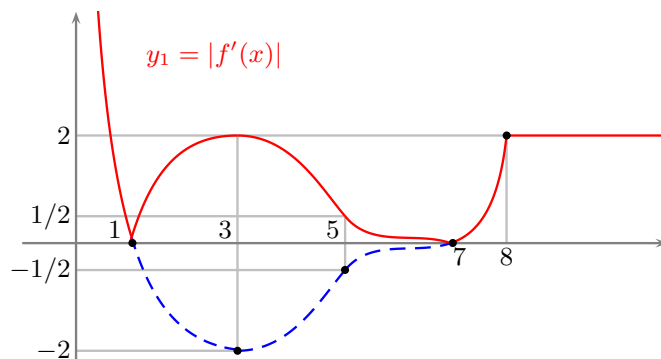


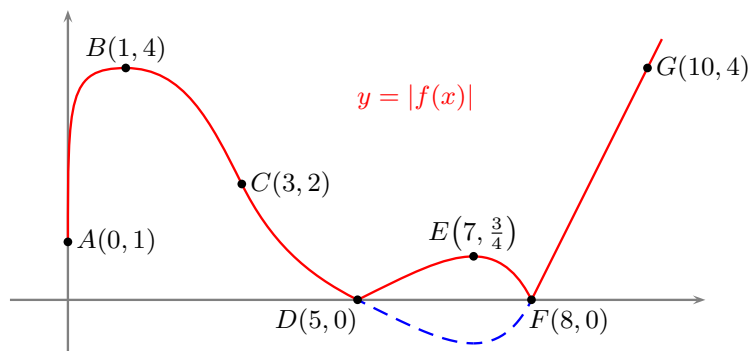
Fig. 6 Un possibile grafico della funzione $|f'(x)|$.

Per quanto riguarda il grafico di $y_2 = |f(x)|'$, va innanzitutto riscritta l'equazione $|f(x)|$ suddividendola in due sottoinsiemi

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{se } f(x) < 0 \end{cases} \quad (11)$$

che, in base a quanto proposto dal testo, si esplicitano in

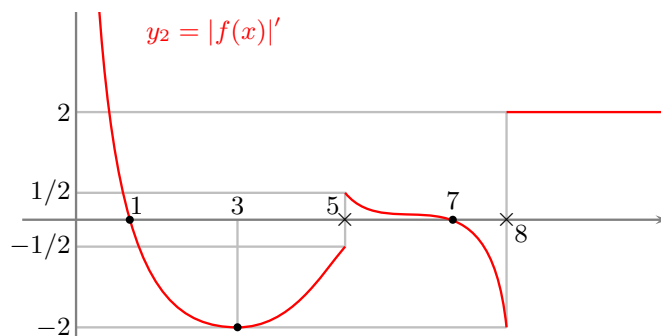
$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{se } 0 \leq x \leq 5 \cup x \geq 8 \\ -f(x), & \text{se } 5 < x < 8. \end{cases} \quad (12)$$

Fig. 7. Grafico della funzione $|f(x)|$.

Il grafico è riportato in figura 7 con la parte corrispondente alle ordinate negative capovolta rispetto all'asse x . In tal modo i punti di ascissa 5 e 8 sono punti angolosi dove non esiste la derivata. Tenendo conto di ciò, le derivate corrispondenti ai due rami di (12) sono

$$|f(x)|' = \begin{cases} f'(x), & \text{se } 0 < x < 5 \vee x > 8 \\ -f'(x), & \text{se } 5 < x < 8. \end{cases} \quad (13)$$

Ne segue che il grafico di y_2 coincide con $f'(x)$ se $x \in (0, 5) \vee (8, +\infty)$ mentre sarà il suo simmetrico rispetto ad x nell'intervallo aperto $(5, 8)$: un possibile grafico è proposto nella figura 8.

Fig. 8 Un possibile grafico della funzione $|f(x)|'$.

Poiché

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f'(x) = f'_-(5) = -\frac{1}{2} \neq \lim_{x \rightarrow 5^+} (-f'(x)) = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

così come

$$\lim_{x \rightarrow 8^+} f'(x) = f'_+(8) = 2 \neq \lim_{x \rightarrow 8^-} (-f'(x)) = -f'_+(8) = -2,$$

il dominio di $y = |f(x)|'$ è l'insieme $\{x \mid x > 0 \wedge x \neq 5 \wedge x \neq 8\}$.

Per lo studio qualitativo della funzione $y_3 = 1/f(x)$ va tenuto conto che $f(5) = f(8) = 0$ per cui, esclusi questi dal dominio, vanno considerati i limiti

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5^\pm} \frac{1}{f(x)} &= \mp\infty & \text{in quanto} & \lim_{x \rightarrow 5^\pm} f(x) = 0^\mp \\ \lim_{x \rightarrow 8^\pm} \frac{1}{f(x)} &= \pm\infty & \text{in quanto} & \lim_{x \rightarrow 8^\pm} f(x) = 0^\pm. \end{aligned}$$

In corrispondenza di $x = 5$ e $x = 8$ il grafico di $y_3 = 1/f(x)$ presenta quindi due asintoti verticali mentre presenta un asintoto orizzontale coincidente con l'asse x in quanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0^+ \quad \text{essendo} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Inoltre alcuni suoi valori sono

$$y_3(0) = \frac{1}{f(0)} = 1, \quad y_3(1) = \frac{1}{f(1)} = \frac{1}{4}, \quad y_3(3) = \frac{1}{f(3)} = \frac{1}{2},$$

$$y_3(7) = \frac{1}{f(7)} = -\frac{4}{3}, \quad y_3(10) = \frac{1}{f(10)} = \frac{1}{4}$$

e poiché

$$y'_3 = D\left[\frac{1}{f(x)}\right] = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$$

risulta $y'_3 \geq 0$ quando $f'(x) \leq 0$. Ciò significa che la funzione è crescente là dove $f(x)$ è decrescente: in particolare possiede un minimo in $x = 1$ dove, come visto sopra, vale $\frac{1}{4}$ e un massimo relativo in $x = 7$ tale che $y_3(7) = -\frac{4}{3}$.

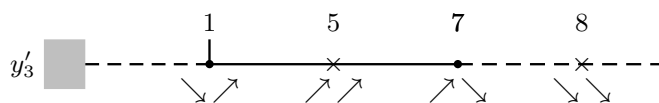


Fig. 9. Segno di $y'_3 = D[1/f(x)]$.

Poiché $f(x) = 2x - 16$ se $x \geq 8$, è pure

$$y_3 = \frac{1}{2(x-8)}, \quad x \geq 8$$

e quindi si riduce in tale insieme ad un ramo di funzione omografica. Il dominio D_3 di y_3 è $D_3 = \{x \mid x \geq 0 \wedge x \neq 5 \wedge x \neq 8\}$ e un suo grafico indicativo appare in figura 10.

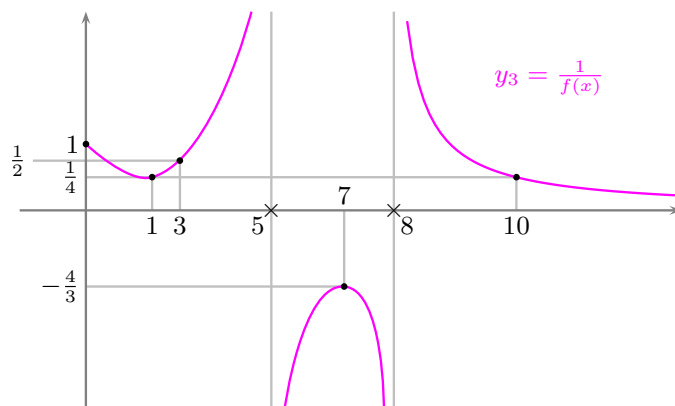


Fig. 10. Un possibile grafico della funzione y_3 (non isometrico).

3. Il valor medio di $f(x)$ in $[0, 8]$ è espresso dall'integrale

$$\overline{f_1} = \frac{1}{(8-0)} \cdot \int_0^8 f(t) dt \quad (14)$$

e per quanto visto in (9) vale

$$\overline{f_3} = \frac{1}{8} \cdot 10 = \frac{5}{4}.$$

Il valor medio di $|f(x)|$ è invece

$$\overline{f_2} = \frac{1}{(8-0)} \cdot \int_0^8 |f(t)| dt$$

che per la proprietà additiva si spezza in

$$\begin{aligned} \overline{f_2} &= \frac{1}{8} \int_0^5 f(t) dt + \frac{1}{8} \int_5^8 [-f(t)] dt \\ &= \frac{1}{8} \cdot \mathcal{A}(\mathcal{R}_1) - \frac{1}{8} \int_5^8 f(t) dt \\ &= \frac{11}{8} - \frac{1}{8} [-\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)] = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

e dove si sono utilizzate le informazioni del testo relative alle aree delle regioni $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$. Per calcolare il valor medio di $f'(x)$ per $x \in [1, 7]$ cioè

$$\overline{f'_1} = \frac{1}{(7-1)} \int_1^7 f'(t) dt$$

va invece considerato il teorema fondamentale del calcolo e sue conseguenze: in particolare, essendo $f(x)$ una primitiva di $f'(x)$ è

$$\overline{f'_1} = \frac{1}{6} \int_1^7 f'(t) dt = \frac{1}{6} [f(7) - f(1)] = \frac{1}{6} \left(-\frac{3}{4} - 4 \right) = -\frac{19}{24}.$$

Il valor medio di $F(x)$ in $[9, 10]$ è

$$\overline{F} = \frac{1}{(10-9)} \cdot \int_9^{10} F(t) dt$$

e per il suo calcolo va ripresa la sua espressione esplicita dedotta precedentemente (10). Pertanto l'integrazione fornisce il valore

$$\begin{aligned} \overline{F} &= 1 \cdot \int_9^{10} (t^2 - 16t + 74) dt = \left[\frac{t^3}{3} - 8t^2 + 74t \right]_9^{10} \\ &= \left(\frac{10^3}{3} - 800 + 740 \right) - \left(\frac{3^6}{3} - 8 \cdot 81 + 74 \cdot 9 \right) \\ &= \frac{1000 - 180}{3} - (243 - 648 + 666) = \frac{37}{3}. \end{aligned}$$

4. Le equazioni delle rette tangenti si deducono dalle espressioni simboliche

$$y - F(0) = F'(0) \cdot (x - 0) \quad \text{e} \quad y - F(8) = F'(8)(x - 8).$$

Poiché per il teorema fondamentale del calcolo (o teorema di Torricelli–Barrow) la derivata della funzione integrale, nel nostro caso $F'(x)$, è uguale alla funzione integranda $f(x)$, abbiamo

$$F'(0) = f(0) = 1 \quad \text{e} \quad F'(8) = f(8) = 0,$$

cosicché, ricordando che $F(0) = 0$ e $F(8) = 10$, discendono le rette

$$t_1: y - 0 = x \implies y = x, \quad t_2: y - 10 = 0(x - 8) \implies y = 10$$

risultato, quest'ultimo, aspettato presentando la $F(x)$ un minimo derivabile in $x = 8$ per cui la retta tangente non potrà che essere orizzontale.

Quesito n. 1: soluzione. (testo del quesito)

L'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (1)$$

rappresenta l'area della regione compresa tra la curva $y = e^{-x^2}$ e l'asse x ed è manifestamente collegato alla funzione

$$y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/2}$$

che rappresenta la densità di probabilità della distribuzione gaussiana standard. Il grafico di

$$y = e^{-x^2} \quad (2)$$

è quindi noto e in figura 1 è rappresentato assieme alla regione di area $\sqrt{\pi}$.

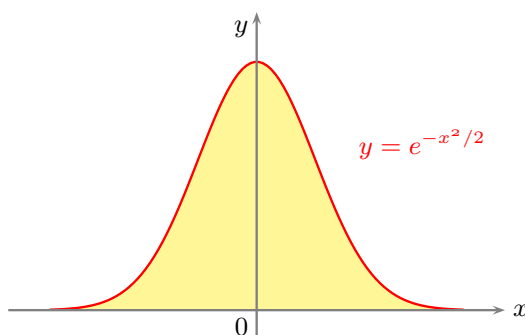


Fig. 1. Grafico di $y = e^{-x^2}$ e regione sottostante.

Per la simmetria pari della (2) è pure

$$\mathcal{R}_1 = \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0,8862 < 1 \quad (3)$$

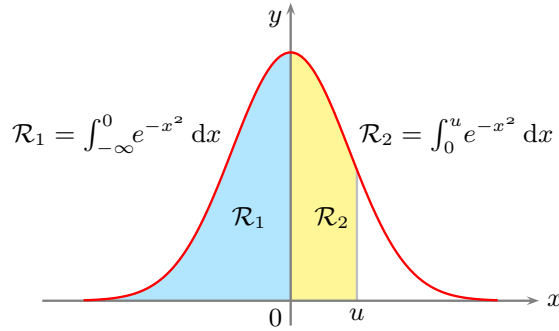


Fig. 2. Regione $\mathcal{R}_u = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2$.

per cui, essendo tale valore minore di

$$\mathcal{R}_u = \int_{-\infty}^u e^{-x^2} dx = 1, \quad (4)$$

il suo estremo superiore dovrà essere maggiore di 0 ossia positivo $u > 0$.

L'interpretazione degli integrali (3) e (4) come aree, rispettivamente delle regioni $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_u = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2$ (fig. 2) suggerisce di applicare la proprietà additiva per cui (4) si può riscrivere come

$$\int_{-\infty}^u e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx + \int_0^u e^{-x^2} dx$$

e quindi l'area della regione compresa nel I quadrante (fig. 2) si ottiene come $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_u - \mathcal{R}_1$ ossia

$$\mathcal{R}_2 = \int_0^u e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^u e^{-x^2} dx - \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx$$

che, per (3) e (4), fornisce il valore

$$\mathcal{R}_2 = \int_0^u e^{-x^2} dx = 1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (5)$$

• Il valore dell'integrale

$$\mathcal{A} = \int_{-u}^u x^7 e^{-x^2} dx \quad (6)$$

è intuitivamente immediato essendo la funzione integranda dispari

$$f(-x) = (-x)^7 \cdot e^{-(-x)^2} = -[x^7 \cdot e^{-x^2}] = -f(x) \quad (7)$$

e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto allo zero: $\mathcal{A}$ dovrà quindi essere nullo. Difatti, posto

$$a = \int_0^u x^7 \cdot e^{-x^2} dx, \quad (8)$$

sempre per l'additività dell'integrale, il calcolo di $\mathcal{A}$ si può spezzare nella somma di due addendi

$$\mathcal{A} = \int_{-u}^0 x^7 e^{-x^2} dx + \int_0^u x^7 e^{-x^2} dx$$

e quindi per (8)

$$\mathcal{A} = \int_{-u}^0 x^7 e^{-x^2} dx + a. \quad (9)$$

Sostituita la variabile x con la nuova variabile $t = -x$, questa comporta per il differenziale e gli estremi di integrazione le relazioni

$$dt = -dx, \quad x = -u \implies t = u \quad \text{mentre se} \quad x = 0 \implies t = 0,$$

e (9) diviene

$$\mathcal{A} = a + \int_u^0 (-t)^7 e^{-(-t)^2} \cdot (-dt).$$

Per la simmetria (7) discende pure

$$\mathcal{A} = a + \int_u^0 [-t^7 e^{-t^2}] \cdot (-dt) = a + \int_u^0 t^7 e^{-t^2} dt$$

e, in definitiva, scambiando gli estremi di integrazione, risulta per (8)

$$\mathcal{A} = a - \int_0^u t^7 e^{-t^2} dt = a - a = 0.$$

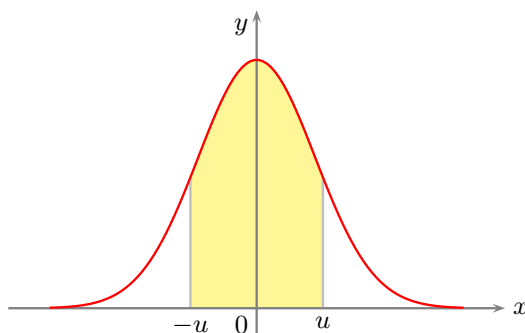


Fig. 3. Regione di area $\mathcal{B}$.

- Per il calcolo di $\mathcal{B}$ (fig. 3)

$$\mathcal{B} = \int_{-u}^u e^{-x^2} dx$$

è sufficiente sfruttare la simmetria dimostrata in (7) e spezzare l'integrale in

$$\mathcal{B} = \int_{-u}^u e^{-x^2} dx = 2 \int_0^u e^{-x^2} dx,$$

per cui, per la (5), discende

$$\mathcal{B} = 2 \int_0^u e^{-x^2} dx = 2 \left(1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) = 2 - \sqrt{\pi}.$$

- Il calcolo di

$$\mathcal{C} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2} dx$$

si esegue ponendo $t = \sqrt{5}x$ per cui vanno aggiornati il differenziale dx e gli estremi osservando che

$$dt = \sqrt{5} dx \implies dx = \frac{dt}{\sqrt{5}}, \quad x \rightarrow \pm\infty \implies t \rightarrow \pm\infty.$$

Ne segue

$$\mathcal{C} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cdot \frac{dt}{\sqrt{5}}$$

e quindi per (1)

$$\mathcal{C} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{5}}.$$

Quesito n. 2: soluzione. (testo del quesito)

L'equazione $p: y = 1 - ax^2$ con $a > 0$ rappresenta un fascio di parabole avente l'asse coincidente con l'asse y , vertice nel punto di coordinate $V(0, 1)$ e concavità nel verso delle ordinate negative (fig. 1).

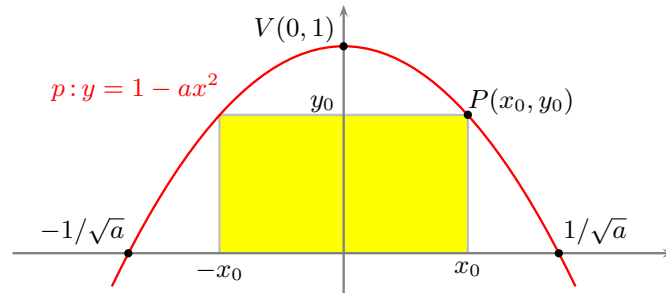


Fig. 1. Segmento parabolico e rettangolo inscritto.

I punti di intersezione con l'asse x si determinano ponendo $y = 0$ e possiedono ascisse

$$0 = 1 - ax^2 \implies x^2 = \frac{1}{a} \implies x = \pm \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad a > 0.$$

Se $P_0(x_0, y_0) \in p$ è un punto generico dell'arco di parabola con ordinata positiva, allora è pure

$$P(x_0, y_0) \equiv P(x_0, 1 - ax_0^2) \quad 0 \leq x_0 \leq \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad (1)$$

e l'area $\mathcal{A}$ del rettangolo inscritto è, per la simmetria della figura, espressa dalla funzione

$$\mathcal{A}(x_0) = (2x_0) \cdot y_0 = 2x_0(1 - ax_0^2), \quad (2)$$

mentre il perimetro $\mathcal{L}$ risulta

$$\mathcal{L}(x_0) = 2(2x_0) + 2y_0 = 2(2x_0 + 1 - ax_0^2). \quad (3)$$

La ricerca del massimo dell'area implica lo studio del segno della sua derivata prima

$$\mathcal{A}'(x_0) = D[2x_0 - 2ax_0^3] = 2 - 6ax_0^2 \geq 0$$

da cui

$$x_0^2 \leq \frac{1}{3a} \implies -\frac{1}{\sqrt{3a}} \leq x_0 \leq \frac{1}{\sqrt{3a}}$$

risultato espresso graficamente dalla figura 2 dove si sono considerate le condizioni (1). Il massimo per l'area è quindi raggiunto in corrispondenza del valore $x_1 = 1/\sqrt{3a}$.

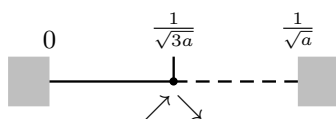


Fig. 2. Segno di $\mathcal{A}'(x_0)$.

Procedendo allo stesso modo per la funzione perimetro (3),

$$\mathcal{L}'(x_0) = 2(2 - 2ax_0) \geq 0 \implies 2 - 2ax_0 \geq 0 \implies x_0 \leq \frac{1}{a}$$

per cui il massimo si trova in corrispondenza del valore $x_2 = \frac{1}{a}$ (fig. 3).

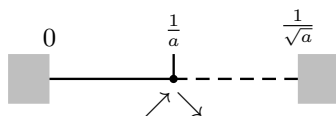


Fig. 3. Segno di $\mathcal{L}'(x_0)$.

Affinché il rettangolo di area massima sia pure quello di perimetro massimo si dovrà porre $x_1 = x_2$, condizione che si traduce nell'equazione

$$\frac{1}{\sqrt{3a}} = \frac{1}{a} \implies a = \sqrt{3a} \implies a^2 = 3a \implies a(a - 3) = 0.$$

Poiché $a = 0$ non è accettabile in quanto $a > 0$, l'unica soluzione accettabile è, in definitiva, $a = 3$.

Quesito n. 3: soluzione. (testo del quesito)

Il recipiente descritto dal testo rientra nei solidi generati da una rotazione attorno all'asse y di un sistema cartesiano Oxy (fig. 1).

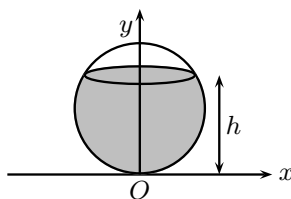


Fig. 1. Recipiente e asse di rotazione.

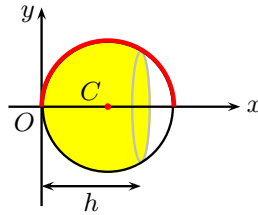


Fig. 2. Recipiente ruotato e nuovo asse di rotazione.

Per determinare la funzione richiesta converrà riportare tale solido alla situazione più frequente che considera invece solidi ottenuti da una rotazione di 2π attorno all'asse x del medesimo sistema. Tale rotazione scambia gli assi x e y e la figura che si ottiene è rappresentata in fig. 2.

Il recipiente si può ora considerare come generato dalla rotazione di un semicerchio appartenente al I quadrante del sistema cartesiano avente centro in $C(r, 0)$ e raggio r . L'equazione della circonferenza che lo delimita è pertanto

$$(x - r)^2 + (y - 0)^2 = r^2 \quad \implies \quad (x - r)^2 + y^2 = r^2$$

dalla quale, con alcune deduzioni algebriche,

$$y^2 = r^2 - x^2 - r^2 + 2rx \quad \implies \quad y^2 = 2rx - x^2$$

otteniamo l'equazione

$$y = \sqrt{2rx - x^2} = f(x), \quad \text{con } 0 \leq x \leq 2r. \quad (1)$$

Il volume cercato si deduce applicando la consueta formula dei solidi di rotazione

$$\mathcal{V} = \pi \int_a^b f(x) \, dx$$

che in tal caso diventa

$$\mathcal{V} = \pi \int_0^h \left(\sqrt{2rx - x^2} \right)^2 dx = \pi \int_0^h (2rx - x^2) dx.$$

L'integrazione è immediata e fornisce

$$\mathcal{V} = \pi \left[2r \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^h = \pi \left(rh^2 - \frac{h^3}{3} \right)$$

come volevasi dimostrare.

Quesito n. 4: soluzione. (testo del quesito)

La probabilità di rispondere correttamente ad una domanda del test scegliendo a caso la risposta è evidentemente $p = \frac{1}{4}$ essendo solo una la risposta corretta tra le quattro

proposte. La probabilità $P(k, p)$ di ottenere k risposte corrette (k successi) su n domande (n prove) rientra invece nello schema tipico della distribuzione binomiale

$$P(k, p) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad (1)$$

ma per la condizione posta per superare il test dovremo calcolare la probabilità che sia $P(k \geq 8, p)$. Pertanto

$$P(k \geq 8, p) = P(8, p) + P(9, p) + P(10, p)$$

e, in base alla (1), diventa

$$\begin{aligned} P(k \geq 8, p) &= \binom{10}{8} p^8 (1-p)^2 + \binom{10}{9} p^9 (1-p)^1 + \binom{10}{10} p^{10} (1-p)^0 \\ &= \frac{10!}{8! \cdot 2!} \cdot \frac{1}{4^8} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{10!}{9! \cdot 1!} \cdot \frac{1}{4^9} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4^{10}}. \end{aligned}$$

Svolgendo i calcoli e ricordando che $n! = n(n-1)!$, otteniamo la probabilità richiesta

$$\begin{aligned} P(k \geq 8, p) &= \frac{9 \cdot 5}{4^8} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{10}{4^9} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4^{10}} \\ &= \frac{1}{4^{10}} \cdot (9 \cdot 5 \cdot 9 + 30 + 1) \\ &= \frac{436}{4^{10}} \approx 4,16 \times 10^{-4}. \end{aligned}$$

Quesito n. 5: soluzione. (testo del quesito)

Per determinare la distanza del punto $K(-2, -1, 2)$ del sistema cartesiano $Oxyz$ dal piano Π di equazione

$$\Pi: 2x - 2y + z - 9 = 0, \quad (1)$$

basta utilizzare la formula che esprime la distanza di un punto (x_0, y_0, z_0) da un generico piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ ossia

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad (2)$$

Nel nostro caso abbiamo

$$d = \frac{|2(-2) - 2(-1) + 1 \cdot 2 - 9|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{9}{3} = 3. \quad (3)$$

In alternativa si può costruire la retta per K perpendicolare al piano Π e, poiché il vettore normale $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ a Π si deduce dai coefficienti di x , y e z nell'equazione $2x - 2y + z - 9 = 0$ e risulta $\vec{n} = (2, -2, 1)$, la retta s si scrive, in forma parametrica, come

$$s: \begin{cases} x = x_K + t \cdot n_x \\ y = y_K + t \cdot n_y \\ z = z_K + t \cdot n_z \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + t. \end{cases} \quad (4)$$

Il punto di intersezione tra tale retta e il piano, $T = s \cap \Pi$, è pure il punto di tangenza della sfera con il piano e lo si determina sostituendo le (4) in (1),

$$2(-2 + 2t) - 2(-1 - 2t) + (2 + t) - 9 = 0 \implies -4 + 4t + 2 + 4t + 2 + t - 9 = 0$$

da cui $9t = 9$ e $t = 1$. Il punto T di tangenza tra sfera e piano Π , possiede quindi le coordinate

$$T(-2 + 2 \cdot 1, -1 - 2 \cdot 1, 2 + 1) \equiv (0, -3, 3)$$

ottenute sostituendo il valore del parametro nelle (4). Ne segue che il raggio r della sfera è pari alla distanza di K dal punto T ,

$$r = \overline{KT} = \sqrt{(0 + 2)^2 + (-3 + 1)^2 + (3 - 2)^2} = 3$$

come già trovato in (3).

Quesito n. 6: soluzione. (testo del quesito)

Per verificare la verità o falsità dell'affermazione

$$\exists P(x), \quad |P(x) - \cos(x)| \leq 10^{-3}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

consideriamo la rappresentazione di un generico polinomio di grado n

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n. \quad (2)$$

Nel caso che qualcuno dei coefficienti delle potenze di x sia diverso dallo zero si ha evidentemente

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \infty \quad (3)$$

per cui è pure

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |P(x) - \cos x| = \lim_{x \rightarrow \infty} \left| P(x) \cdot \left[1 - \frac{\cos x}{P(x)} \right] \right|. \quad (4)$$

Poiché $-1 \leq \cos x \leq 1$ è pure

$$-\frac{1}{P(x)} \leq \frac{\cos x}{P(x)} \leq \frac{1}{P(x)}$$

ma per la (3) è

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pm 1}{P(x)} = 0,$$

cosicché per il teorema del confronto è anche,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{P(x)} = 0.$$

Il limite (4) si risolve in

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} |P(x) - \cos x| &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left| P(x) \cdot \left[1 - \frac{\cos x}{P(x)} \right] \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} |P(x)| = +\infty \end{aligned}$$

e quindi la condizione (1) non può essere rispettata $\forall x \in \mathbb{R}$.

Se invece l'unico coefficiente non nullo di (2) fosse il termine noto a_n , $P(x)$ si ridurrebbe ad una costante $P(x) = a_n = a$. In tal caso la condizione (1) si riscrive come

$$|a - \cos x| \leq 10^{-3} \quad \text{che è equivalente alla} \quad -10^{-3} \leq a - \cos x \leq 10^{-3}$$

dalla quale si ha pure

$$-10^{-3} - a \leq -\cos x \leq 10^{-3} - a,$$

ed infine, moltiplicando per -1 ,

$$a - 10^{-3} \leq \cos x \leq a + 10^{-3}. \quad (5)$$

Affinché questa condizione ammetta soluzioni $\forall x \in \mathbb{R}$ dev'essere

$$\begin{cases} a - 10^{-3} < -1 \\ a + 10^{-3} > 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a < -1 + 10^{-3} \\ a > 1 - 10^{-3} \end{cases} \implies \begin{cases} a < -0,999 \\ a > 0,999, \end{cases}$$

ma queste ultime condizioni non possono essere soddisfatte assieme per qualche valore di a (fig. 1).



Fig. 1.

Pertanto l'affermazione (1) è falsa.

Quesito n. 7: soluzione. (testo del quesito)

Coerentemente con il testo del quesito, supponiamo che una mossa consista di uno spostamento o

- solo verso destra (mossa di tipo D) oppure
- solo verso l'alto (mossa di tipo A).

Pertanto per raggiungere la casella A sono necessarie 7 mosse del tipo D e 7 del tipo A (fig. 1).

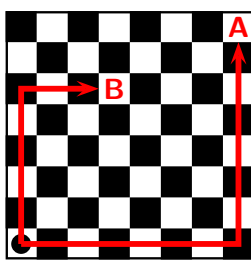


Fig. 1. Due percorsi: per A e per B.

Un percorso si può quindi identificare con una combinazione di 7 lettere D e con altrettante A così da riempire 14 celle come, per esempio, nella rappresentazione schematica di fig. 2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	← numero d'ordine
D	D	A	D	A	A	D	A	A	D	A	D	A	D	← tipo di mossa

Fig. 2. Un possibile percorso per A.

Si tratta quindi di disporre il numero ordinale di una mossa cioè un elemento dell'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ in gruppi di 7 elementi relativi solo alla mossa D verso destra: in tal caso le rimanenti 7 posizioni saranno occupate da mosse di tipo A. E, ovviamente, tale osservazione rimane valida se si scambiano le mosse di tipo D con quelle di tipo A.

Il numero n dei possibili percorsi è dato quindi dal numero delle combinazioni di 14 oggetti a gruppi di 7 ossia

$$n = C_{14,7} = \binom{14}{7} = \frac{14!}{7!(14-7)!} = 3432. \quad (1)$$

Per raggiungere la casella B si può ragionare allo stesso modo: sono necessarie 8 mosse, delle quali 3 di tipo D e 5 di tipo A. Pertanto i possibili percorsi per giungere in B sono in numero uguale alle combinazioni di 8 oggetti $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ in gruppi di 3 (o, il che è lo stesso, in gruppi di 5) ossia

$$C_{8,3} = \binom{8}{3} = C_{8,5} = \binom{8}{5} = 56. \quad (2)$$

Raggiunta la cella B si deve proseguire per arrivare in A: ora sono necessarie ulteriori 6 mosse, 4 di tipo D e 2 di tipo A. Il numero dei percorsi è quindi

$$C_{6,2} = \binom{6}{2} = C_{6,4} = 15. \quad (3)$$

Ognuno di questi ultimi si può associare a tutti quelli, dati da (2), che conducono in B per cui, in definitiva, il numero di percorsi n_{BA} che portano in A passando per B è

$$n_{BA} = C_{8,3} \cdot C_{6,2} = \binom{8}{3} \cdot \binom{6}{2} = 56 \cdot 15 = 840. \quad (4)$$

Rapportando tale risultato al numero n di tutti i possibili percorsi (1), otteniamo la probabilità P richiesta ossia

$$P = \frac{n_{BA}}{n} = \binom{8}{3} \cdot \binom{6}{2} / \binom{14}{7} = \frac{840}{3432} = \frac{35}{143} \approx 0,2448.$$

Quesito n. 8: soluzione. (testo del quesito)

L'insieme delle primitive della funzione

$$f(x) = e^x(2x + x^2) \quad (1)$$

è rappresentato dall'integrale indefinito

$$F(x) = \int e^x(2x + x^2) dx \quad (2)$$

e si chiede di individuare la particolare primitiva il cui grafico passa per $(1, 2e)$ ossia tale che $F(1) = 2e$. L'integrazione di (2) si può eseguire osservando che il fattore differenziale

$e^x dx$ possiede come primitiva la funzione e^x : l'integrazione per parti permette di riscrivere quindi l'integrale come

$$\begin{aligned} F(x) &= e^x(2x + x^2) - \int D[2x + x^2]e^x dx \\ &= e^x(2x + x^2) - \int (2 + 2x)e^x dx \\ &= e^x(2x + x^2) - 2 \int (1 + x)e^x dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Riapplicando nell'integrale rimasto ancora l'integrazione per parti con il medesimo fattore differenziale, abbiamo

$$\begin{aligned} F(x) &= e^x(2x + x^2) - 2 \left[(1 + x)e^x - \int D[1 + x]e^x dx \right] \\ &= e^x(2x + x^2) - 2(1 + x)e^x + 2 \int e^x dx \\ &= e^x(2x + x^2) - 2(1 + x)e^x + 2e^x + c \\ &= e^x x^2 + c \end{aligned} \quad (4)$$

Imponendo la condizione $F(1) = 2e$ nel risultato (4), possiamo determinare la costante additiva c

$$F(1) = 2e \implies e^1(1)^2 + c = 2e \implies c = e$$

e quindi concludere che la primitiva cercata dev'essere $F(x) = x^2 \cdot e^x + e$.

Quesito n. 9: soluzione. (testo del quesito)

Le rette r ed s assegnate sono rappresentate dai due sistemi

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t, \end{cases} \quad s : \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y = 0, \end{cases} \quad (1)$$

rispettivamente in forma parametrica e in forma cartesiana. Il vettore che identifica la direzione di r è formato dai coefficienti del parametro t , $\vec{v}_1(1, 2, 1)$, mentre per individuare quello di s riscriviamo s in forma parametrica definendo come parametro per esempio, $x = \lambda$. Dalla seconda delle (1) segue che

$$y = 2\lambda \quad \text{e} \quad z = -x - y + 3 = -\lambda - 2\lambda + 3 = -3\lambda + 3$$

per cui

$$s : \begin{cases} x = 0 + \lambda \\ y = 0 + 2\lambda \\ z = 3 - 3\lambda \end{cases} \quad \text{e il vettore direzione è } \vec{v}_2(1, 2, -3). \quad (2)$$

Poiché il piano π cercato è parallelo a r e s , dev'essere perpendicolare al vettore $\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ ossia

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}[2(-3) - 1 \cdot 2] - \vec{j}[1(-3) - 1 \cdot 1] + \vec{k}(1 \cdot 2 - 2 \cdot 1) \\ &= -8\vec{i} + 4\vec{j} + 0\vec{k}. \end{aligned} \quad (3)$$

Se $P(1, 0, -2) \in \pi$ e $Q(x, y, z) \in \pi$ è un suo punto generico, il vettore

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= (x_Q - x_P)\overrightarrow{i} + (y_Q - y_P)\overrightarrow{j} + (z_Q - z_P)\overrightarrow{k} \\ &= (x - 1)\overrightarrow{i} + (y - 0)\overrightarrow{j} + (z + 2)\overrightarrow{k}\end{aligned}$$

dev'essere perpendicolare a $\overrightarrow{n}$ per cui il piano π è individuato dalla condizione di perpendicolarità $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{n} = 0$. Ripreso il vettore (3), la condizione detta si esplicita in

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \implies (x - 1) \cdot (-8) + (y - 0) \cdot 4 + (z + 2) \cdot 0 = 0$$

da cui $-8x + 8 + 4y = 0$ e, in definitiva, l'equazione del piano è $\pi: 2x - y - 2 = 0$.

Quesito n. 10: soluzione. (testo del quesito)

La funzione f di dominio $]1, +\infty)$ è rappresentata da

$$f(x) = \int_e^{x^2} \frac{t}{\ln t} dt, \quad x \in]1, +\infty), \quad (1)$$

e la retta tangente nel suo punto di ascissa $x_1 = \sqrt{e}$ è formalmente data dall'equazione

$$y - f(\sqrt{e}) = f'(\sqrt{e}) \cdot (x - \sqrt{e}). \quad (2)$$

dove appare il calcolo della sua derivata prima $f'(\sqrt{e})$. Per procedere quindi al suo calcolo notiamo che, posto $z = x^2$, la funzione assegnata (1) si può interpretare come composta dalla funzione integrale

$$f(z) = \int_e^z \frac{t}{\ln t} dt, \quad \text{e dalla } z = x^2. \quad (3)$$

Per calcolare $f'(x)$ possiamo quindi applicare il teorema della derivata di una funzione composta che, in tal caso, assume la forma

$$f'(x) = D\left[\int_e^z \frac{t}{\ln t} dt\right] \cdot D(z). \quad (4)$$

Il primo fattore rappresenta la derivata rispetto a z di una funzione integrale per cui restituisce la funzione integranda calcolata nel suo estremo superiore

$$D\left[\int_e^z \frac{t}{\ln t} dt\right] = \frac{z}{\ln z} = \frac{x^2}{\ln(x^2)},$$

mentre $D(z) = D(x^2) = 2x$ cosicché (4) diviene

$$f'(x) = \frac{x^2}{\ln(x^2)} \cdot (2x) = \frac{2x^3}{\ln(x^2)}.$$

Segue ora

$$f'(\sqrt{e}) = \frac{2e^{3/2}}{\ln(e)} = 2e^{3/2}. \quad (5)$$

Il calcolo di $f(\sqrt{e})$ implica invece

$$f(\sqrt{e}) = \int_e^{(\sqrt{e})^2} \frac{t}{\ln t} dt = \int_e^e \frac{t}{\ln t} dt = 0 \quad (6)$$

in quanto integrale definito con estremi di integrazione coincidenti.

Ripresa l'equazione (2) con i risultati (5) e (6), la retta tangente al grafico di f è rappresentata dall'equazione

$$y - 0 = 2e^{3/2}(x - \sqrt{e}) \implies y = 2e^{3/2}x - 2e^2.$$

ESAME 2017

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

• Problema n. 1

Si può pedalare agevolmente su una bicicletta a ruote quadrate? A New York, al MoMath-Museum of Mathematics si può fare, in uno dei padiglioni dedicati al divertimento matematico (figura 1). È però necessario che il profilo della pedana su cui il lato della ruota può scorrere soddisfi alcuni requisiti.

In figura 2 è riportata una rappresentazione della situazione nel piano cartesiano Oxy : il quadrato di lato $DE = 2$ (in opportune unità di misura) e di centro C rappresenta la ruota della bicicletta, il grafico della funzione $f(x)$ rappresenta il profilo della pedana.



Figura 1

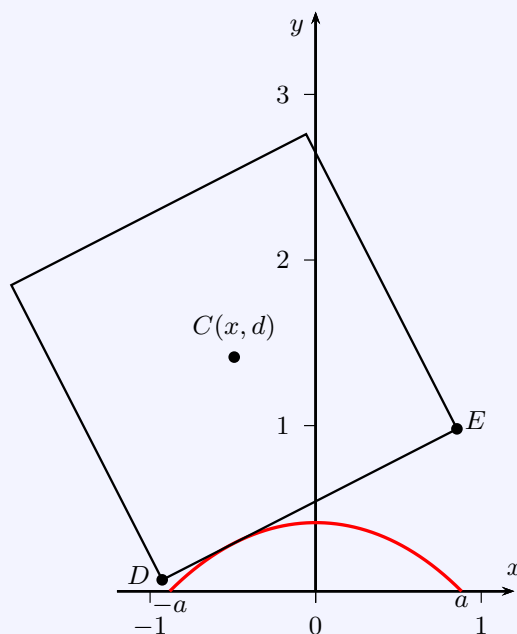


Figura 2

- 1) Sulla base delle informazioni ricavabili dal grafico in figura 2, mostra, con le opportune argomentazioni, che la funzione:

$$f(x) = \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad x \in \mathbb{R}$$

rappresenta adeguatamente il profilo della pedana per $x \in [-a; a]$; determina inoltre

il valore degli estremi a e $-a$ dell'intervallo.

Per visualizzare il profilo completo della pedana sulla quale la bicicletta potrà muoversi, si affiancano varie copie del grafico della funzione $f(x)$ relativo all'intervallo $[-a; a]$, come mostrato in figura 3.

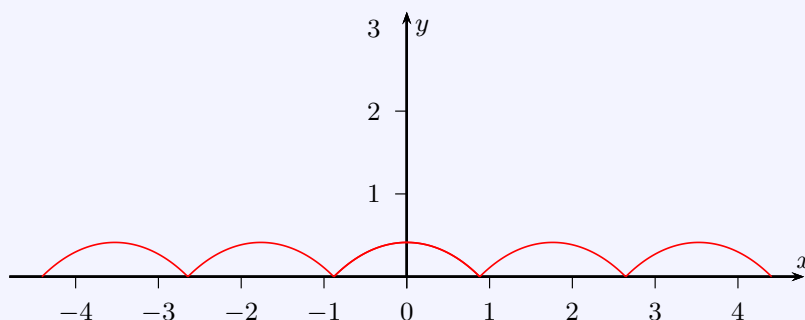


Figura 3

- 2) Perché la bicicletta possa procedere agevolmente sulla pedana è necessario che:
- a sinistra e a destra dei punti di non derivabilità i tratti del grafico siano ortogonali;
 - la lunghezza del lato della ruota quadrata risulti pari alla lunghezza di una "gobba", cioè dell'arco di curva di equazione $y = f(x)$ per $x \in [-a; a]$.

Stabilisci se tali condizioni sono verificate.

(In generale, la lunghezza dell'arco di curva avente equazione $y = \varphi(x)$ compreso tra le ascisse x_1 e x_2 è data da $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx$.)

- 3) Considerando la similitudine dei triangoli rettangolo ACL e ALM in figura 4, e ricordando il significato geometrico della derivata, verifica che il valore dell'ordinata d del centro della ruota si mantiene costante durante il moto. Pertanto, al ciclista sembra di muoversi su una superficie piana.

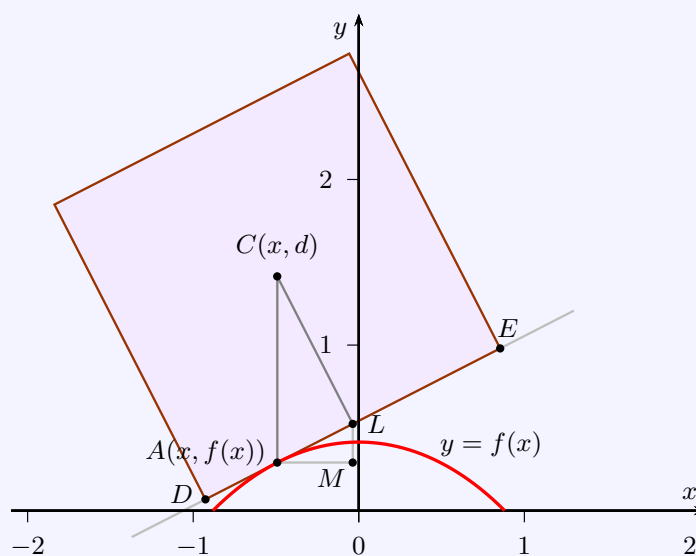


Figura 4

Anche il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{per } x \in \left[-\frac{\ln(3)}{2}; \frac{\ln(3)}{2}\right]$$

se replicato varie volte, può rappresentare il profilo di una pedana adatta a essere percorsa da una bicicletta con ruote molto particolari, aventi la forma di un poligono regolare.

4) Individua tale poligono regolare, motivando la risposta.

Soluzione

• Problema n. 2

Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periodica di periodo $T = 4$ il cui grafico, nell'intervallo $[0; 4]$, è il seguente:

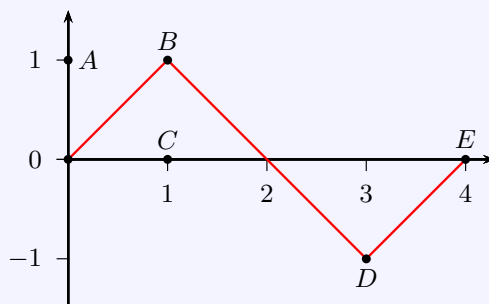


Figura 1

Come si evince dalla figura 1, i tratti OB , BD , DE del grafico sono segmenti i cui estremi hanno coordinate: $O(0,0)$, $B(1,1)$, $D(3,-1)$, $E(4,0)$.

- 1) Stabilisci in quali punti del suo insieme di definizione la funzione f è continua e in quali è derivabile e verifica l'esistenza dei limiti: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$; qualora esistano, determinare il valore.

Rappresentare inoltre, per $x \in [0, 4]$, i grafici delle funzioni:

$$g(x) = f'(x)$$

$$h(x) = \int_0^x f(t) dt$$

- 2) Considera la funzione:

$$s(x) = \sin(bx)$$

con b costante reale positiva; determina b in modo che $s(x)$ abbia lo stesso periodo di $f(x)$. Dimostra che la porzione quadrata di piano $OABC$ in figura 1 viene suddivisa dai grafici di $f(x)$ e $s(x)$ in 3 parti distinte e determina le probabilità che

un punto preso a caso all'interno del quadrato $OABC$ ricada in ciascuna delle 3 parti individuate.

3) Considerando ora le funzioni:

$$f(x)^2 \quad \text{e} \quad s(x)^2$$

discuti, anche con argomentazioni qualitative, le variazioni (in aumento o in diminuzione) dei 3 valori di probabilità determinati al punto precedente.

4) Determina infine il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse y della porzione di piano compresa tra il grafico della funzione h per $x \in [0; 3]$ e l'asse delle x .

Soluzione

Questionario

1. Definito il numero E come:

$$E = \int_0^1 x e^x dx,$$

dimostrare che risulta:

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2E,$$

ed esprimere

$$\int_0^1 x^3 e^x dx$$

in termini di e ed E .

Soluzione

2. Una torta di forma cilindrica è collocata sotto una cupola di plastica di forma emisferica. Dimostrare che la torta occupa meno dei $3/5$ del volume della semisfera.

Soluzione

3. Sapendo che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax + 2b} - 6}{x} = 1$$

determinare i valori di a e b .

Soluzione

4. Per sorteggiare numeri reali nell'intervallo $[0, 2]$ viene realizzato un generatore di numeri casuali che fornisce numeri distribuiti, in tale intervallo, con densità di probabilità data dalla funzione:

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3$$

Quale sarà il valore medio dei numeri generati?

Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia $4/3$?

Qual è la probabilità che il secondo numero estratto sia minore di 1?

Soluzione

5. Dati i punti $A(-2, 3, 1)$, $B(3, 0, -1)$, $C(2, 2, -3)$, determinare l'equazione della retta r passante per A e per B e l'equazione del piano π perpendicolare ad r e passante per C .

Soluzione

6. Determinare il numero reale a in modo che il valore di

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^a}$$

sia un numero reale non nullo.

Soluzione

7. Determinare le coordinate dei centri delle sfere di raggio $\sqrt{6}$ tangenti al piano π di equazione:

$$x + 2y - z + 1 = 0$$

nel suo punto P di coordinate $(1, 0, 2)$.

Soluzione

8. Un dado ha la forma di un dodecaedro regolare con le facce numerate da 1 a 12. Il dado è truccato in modo che la faccia contrassegnata dal numero 3 si presenti con una probabilità p doppia rispetto a ciascun'altra faccia. Determinare il valore di p in percentuale e calcolare la probabilità che in 5 lanci del dado la faccia numero 3 esca almeno 2 volte.

Soluzione

9. Dimostrare che l'equazione:

$$\operatorname{arctg}(x) + x^3 + e^x = 0$$

ha una e una sola soluzione reale.

Soluzione

10. Data la funzione:

$$f(x) = |4 - x^2|$$

verificare che essa non soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-3; 3]$ e che comunque esiste almeno un punto dell'intervallo $[-3; 3]$ in cui la derivata prima di $f(x)$ si annulla. Questo esempio contraddice il teorema di Rolle? Motivare la risposta in maniera esauriente.

Soluzione

Problema n. 1: soluzione. (testo del problema)

1. Il grafico Γ della funzione

$$f(x) = \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

rappresentato in fig. 1 mostra una evidente simmetria rispetto all'asse delle ordinate per cui la f dovrà essere una funzione simmetrica pari.

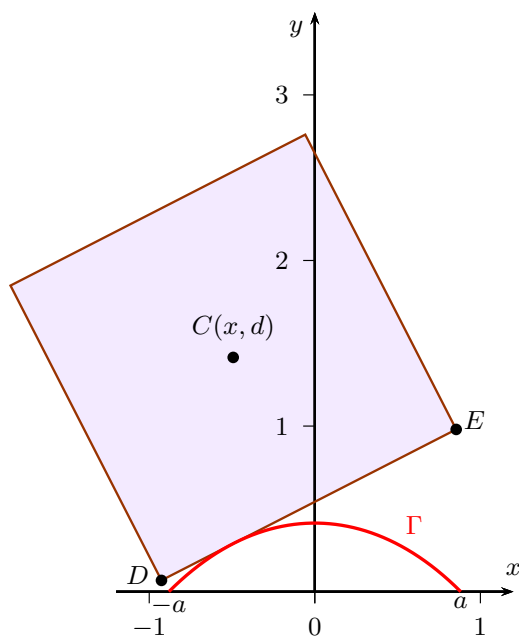


Fig. 1. Profilo Γ della pedana e ruota quadrata.

Difatti per f è soddisfatta l'identità

$$f(-x) = \sqrt{2} - \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \sqrt{2} - \frac{e^{-x} + e^x}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{oppure } x \in [-a, a]).$$

I punti di intersezione con l'asse x e il segno discendono invece dallo studio di $f(x) \geq 0$ che implica

$$\sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} \geq 0 \implies 2\sqrt{2} - (e^x + e^{-x}) \geq 0 \implies 2\sqrt{2} \geq e^x + \frac{1}{e^x}$$

per cui, moltiplicando entrambi i membri per $e^x > 0$ otteniamo

$$(e^x)^2 - 2\sqrt{2}e^x + 1 \leq 0$$

che, con la posizione $t = e^x$, si riduce alla disequazione di II grado

$$t^2 - 2\sqrt{2}t + 1 \leq 0.$$

Calcolate le soluzioni dell'equazione associata, $t_{1,2} = \sqrt{2} \pm 1$, la precedente è soddisfatta nell'intervallo

$$\sqrt{2} - 1 \leq t \leq \sqrt{2} + 1 \implies \sqrt{2} - 1 \leq e^x \leq \sqrt{2} + 1$$

che, per la monotonia del logaritmo naturale, è equivalente alla

$$\ln(\sqrt{2} - 1) \leq x \leq \ln(\sqrt{2} + 1)$$

Deve quindi essere

$$-a = \ln(\sqrt{2} - 1) \quad \text{e} \quad a = \ln(\sqrt{2} + 1) \approx 0,8814.$$

I due valori sono effettivamente opposti in quanto la loro somma è, come aspettato, nulla: difatti, utilizzando le proprietà dei logaritmi,

$$a + (-a) = \ln(\sqrt{2} + 1) + \ln(\sqrt{2} - 1) = \ln[(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)] = \ln(2 - 1) = \ln 1 = 0.$$

Per individuare il massimo e la disposizione della concavità, calcoliamo la derivata prima e, successivamente, la seconda e ne studiamo i segni.

$$f'(x) = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{-x} - e^x}{2} \quad (2)$$

e $f'(x) \geq 0$ implica

$$e^{-x} - e^x \geq 0 \implies e^{-x} \geq e^x \implies -x \geq x \implies x \leq 0.$$

La f presenta quindi un massimo in corrispondenza di $x = 0$ la cui ordinata è

$$f(0) = y_{\max} = \sqrt{2} - 1 \approx 0,4142. \quad (3)$$

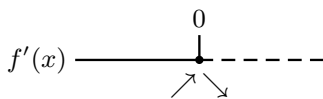


Fig. 2. Segno di $f'(x)$.

Passando alla derivata seconda, dalla (2),

$$f''(x) = \frac{-e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^{-x} + e^x}{2} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

cosicché la concavità è rivolta nel verso negativo dell'asse y . Il grafico Γ di f è quindi coerente con quello proposto dal problema in fig. 1.

2. Costruito il modello della pedana con la traslazione periodica del grafico Γ di f in $[-a, a]$ (fig. 3), verifichiamo che nei punti di non derivabilità i tratti del grafico siano ortogonali. Sarà a tale scopo sufficiente calcolare la derivata sinistra in $f'_-(a)$ e destra in $f'_+(-a)$ in quanto la funzione ottenuta estendendo la f è manifestamente periodica.

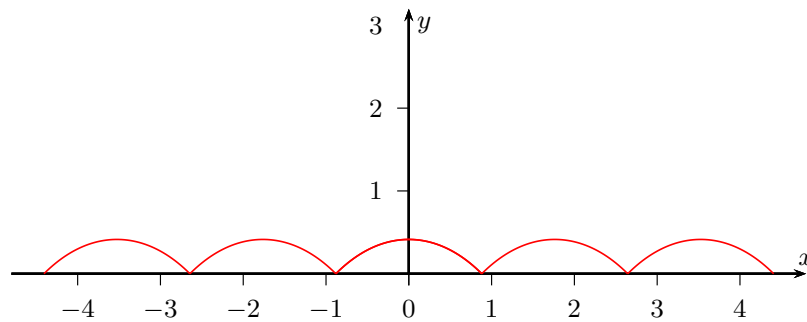


Fig. 3. Profilo completo della pedana.

Pertanto, ripresa la (2), risulta

$$f'_-(a) = \frac{e^{-a} - e^a}{2}$$

ma essendo $a = \ln(\sqrt{2} + 1)$ e $-a = \ln(\sqrt{2} - 1)$, è pure

$$e^a = \sqrt{2} + 1, \quad e^{-a} = \sqrt{2} - 1 \quad (4)$$

cosicché

$$f'_-(a) = \frac{\sqrt{2} - 1 - (\sqrt{2} + 1)}{2} = -1.$$

Analogamente o, anche, per simmetria,

$$f'_+(-a) = \frac{e^{-(-a)} - e^{-a}}{2} = \frac{\sqrt{2} + 1 - (\sqrt{2} - 1)}{2} = +1.$$

Il significato goniometrico di derivata permette di risalire agli angoli, α e β , che le rette tangenti formano con il semiasse positivo delle x (fig. 4) ossia

$$\begin{aligned} f'_-(a) = \operatorname{tg} \alpha = -1 & \implies \alpha = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4} \\ f'_+(-a) = \operatorname{tg} \beta = 1 & \implies \beta = \operatorname{arctg}(+1) = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

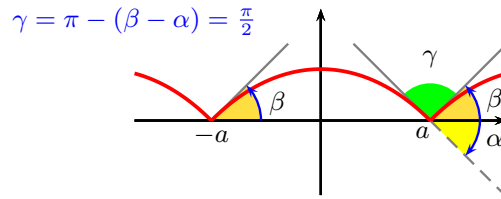


Fig. 4. Profilo della pedana e angolo delle rette tangenti nei punti angolosi.

L'angolo tra le tangenti (sinistra e destra) nel punto angoloso di ascissa a (e quindi, per periodicità, in tutti gli altri) è quindi

$$\gamma = \pi - (\beta - \alpha) = \pi - \left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right] = \frac{\pi}{2}.$$

La seconda condizione impone che la lunghezza della curva compresa in $[-a, a]$ debba essere pari al lato della ruota cioè pari a 2. Verifichiamolo utilizzando la formula fornita dal testo che, appunto, dà la lunghezza dell'arco di curva, cioè

$$l = \int_{-a}^a \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

e che, per la (2) e per la simmetria già studiata, si può ridurre alla

$$l = 2 \cdot \int_0^a \sqrt{1 + \left[\frac{e^{-x} - e^x}{2} \right]^2} dx.$$

Dopo qualche manipolazione algebrica l'ultimo integrale si può riscrivere anche come

$$\begin{aligned} l &= 2 \int_0^a \sqrt{1 + \frac{1}{4} (e^{-2x} + e^{2x} - 2)} dx = 2 \int_0^a \sqrt{\frac{1}{4} (e^{-2x} + e^{2x} + 2)} dx \\ &= 2 \int_0^a \frac{1}{2} \sqrt{e^{-2x} + e^{2x} + 2} dx = \int_0^a \sqrt{e^{-2x} + e^{2x} + 2} dx \end{aligned} \quad (5)$$

e poiché

$$e^{-2x} + e^{2x} + 2 = (e^{-x} + e^x)^2,$$

la funzione integranda di (5) si semplifica in

$$l = \int_0^a \sqrt{(e^{-x} + e^x)^2} dx = \int_0^a (e^{-x} + e^x) dx.$$

L'integrale indefinito associato è ora immediato

$$\int (e^{-x} + e^x) dx = -e^{-x} + e^x + c$$

per cui la lunghezza cercata è, come richiesto,

$$\begin{aligned} l &= \int_0^a (e^{-x} + e^x) dx = [-e^{-x} + e^x]_0^a \\ &= -e^{-a} + e^a - (-1 + 1) = e^a - e^{-a} = 2 \end{aligned}$$

e dove, nell'ultimo calcolo, si sono tenute presenti le relazioni (4) già dimostrate.

3. L'ordinata d del punto $C(x, d)$, asse della ruota, deve essere una costante al variare di x e, considerando il lato della ruota a contatto con il profilo del "suolo" come orizzontale, il valore di d dovrà essere (fig. 5)

$$d = \overline{CA} + y_{max} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2}$$

essendo $\overline{CA}$ pari alla metà del lato del quadrato e $y_{max} = \sqrt{2} - 1$ il valore calcolato in (3).

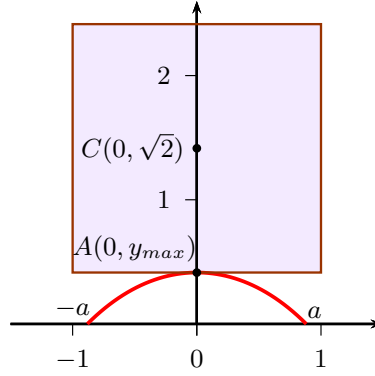


Fig. 5. Ordinata dell'asse della ruota.

Per verificare che l'ordinata di C sia indipendente da x sfruttiamo l'interpretazione geometrica della derivata prima ossia come questa rappresenti la pendenza della retta tangente DE nella figura 6. Notata la similitudine di $\triangle ACL$ e $\triangle ALM$ (entrambi triangoli rettangoli con $\angle LAM$ complementare di $\angle LAC$ e quindi $\angle LAM = \angle ACL$), valgono i rapporti

$$f'(x) = \frac{\overline{ML}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AL}}{\overline{CL}}$$

Poiché $\overline{CL} = 1$ è pure

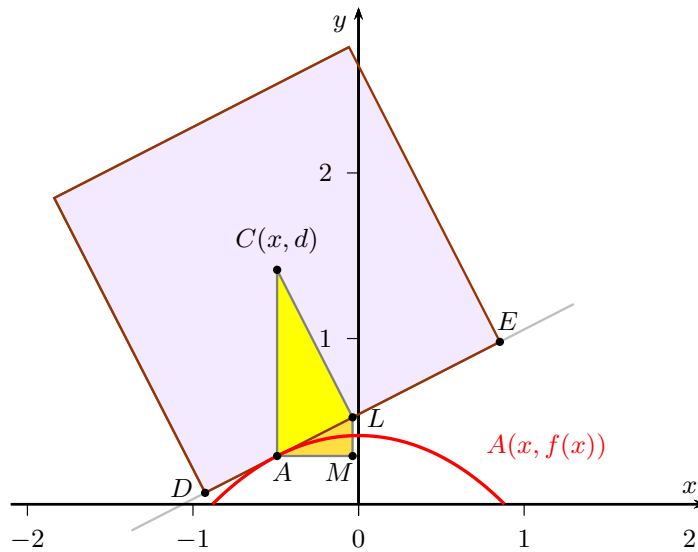
$$\overline{AL} = 1 \cdot f'(x) = f'(x). \quad (6)$$

D'altra parte, per il teorema di Pitagora applicato a $\triangle ACL$ è pure

$$\overline{AL}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CL}^2$$

e poiché $A(x, f(x))$, $C(x, d)$ e $\overline{CL} = 1$ è

$$\overline{AL}^2 = [d - f(x)]^2 - 1. \quad (7)$$

**Fig. 6.** Similitudine di triangoli.

Elevando al quadrato la (6) e uguagliata alla (7) otteniamo

$$[f'(x)]^2 = [d - f(x)]^2 - 1$$

che, per (2) e (1), si esplicita in

$$\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \left(d - \sqrt{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - 1. \quad (8)$$

Tale relazione rappresenta una equazione nell'incognita d e poiché ci aspettiamo che sia $d = \sqrt{2}$ una sua soluzione, la sostituzione di tale valore dovrebbe ridurre la (8) ad una identità. Difatti risulta

$$\begin{aligned} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 &= \left(\sqrt{2} - \sqrt{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - 1 \\ \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - 1 \end{aligned}$$

e sviluppando i calcoli troviamo

$$\frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} - 2) = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2) - 1 \quad \cdot 4$$

$$e^{2x} + e^{-2x} - 2 = e^{2x} + e^{-2x} + 2 - 4 \implies e^{2x} + e^{-2x} - 2 = e^{2x} + e^{-2x} - 2$$

che, manifestamente, è una identità. Ovviamente e, in alternativa, si potranno svolgere i calcoli nella (8) determinando esplicitamente la soluzione cercata.

4. Così come l'angolo tra le due tangenti nei punti angolosi doveva essere pari a $\pi/2$ cioè all'angolo formato da due lati adiacenti del quadrato, la medesima proprietà deve valere

per la nuova funzione. Il poligono regolare incognito dovrà quindi avere un angolo tra due lati consecutivi pari all'angolo formato dalle due tangenti nei punti angolosi della funzione

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \left[-\frac{\ln 3}{2}, \frac{\ln 3}{2}\right]. \quad (9)$$

Tale funzione differisce dalla precedente per la sola costante additiva $2/\sqrt{3}$ per cui le proprietà di simmetria pari rimangono inalterate. In particolare, notato che

$$\begin{aligned} e^{\ln(3)/2} &= (e^{\ln 3})^{1/2} = 3^{1/2} = \sqrt{3} \\ e^{-\ln(3)/2} &= (e^{\ln 3})^{-1/2} = 3^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned} \quad (10)$$

la nuova funzione si annulla agli estremi

$$f\left(\pm \frac{\ln 3}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} + 1/\sqrt{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = 0$$

mentre per la derivata prima

$$f'(x) = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x), \quad (11)$$

identica a quella, (2), della funzione iniziale, vale l'identità

$$f'(-x) = \frac{1}{2}[e^{-(-x)} - e^{-x}] = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -f'(x)$$

ossia f' è una funzione dispari. Poiché la derivata sinistra in $\ln(3)/2$ vale per le (10)

$$\begin{aligned} f'_-\left(\frac{\ln 3}{2}\right) &= \frac{1}{2}(e^{-\ln(3)/2} - e^{\ln 3/2}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \end{aligned} \quad (12)$$

segue che l'angolo α che la retta tangente forma nell'intorno sinistro di $\ln(3)/2$ con l'asse x è (fig. 7)

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

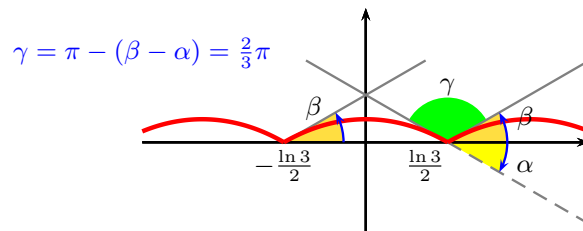


Fig. 7. Profilo della nuova pedana e angolo delle rette nei punti angolosi.

Per simmetria dispari della derivata prima e per (12) è pure

$$f'_+\left(-\frac{\ln 3}{2}\right) = \operatorname{tg} \beta = -f'_-\left(\frac{\ln 3}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies \beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

cosicché l'angolo interno al poligono regolare è (fig. 7)

$$\gamma = \pi - (\beta - \alpha) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi.$$

Poiché l'angolo interno γ_n di un poligono regolare di n lati è dato da

$$\gamma_n = \pi - \frac{2\pi}{n}$$

dalla $\gamma_n = \gamma$ segue che

$$\pi - \frac{2\pi}{n} = \frac{2}{3}\pi \implies \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{3} \implies n = 6$$

e pertanto la ruota dovrà avere la forma di un esagono regolare (fig. 8).

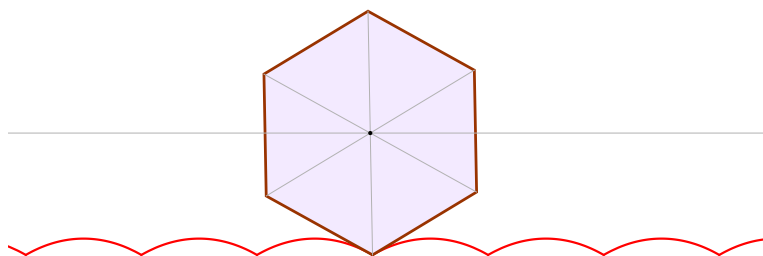


Fig. 8. Ruota esagonale.

Problema n. 2: soluzione. (testo del problema)

La funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periodica di periodo $T = 4$, possiede il grafico Γ in $[0, 4]$ riportato in figura 1: in particolare i punti O , B , D ed E hanno coordinate $O(0, 0)$, $B(1, 1)$, $D(3, -1)$ e $E(4, 0)$.

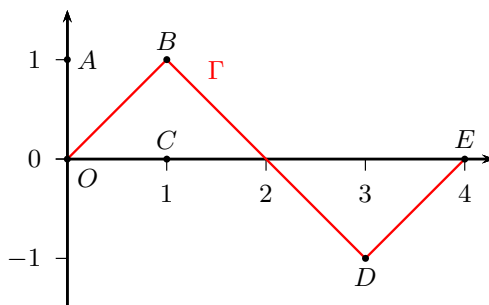


Fig. 1. Grafico Γ di $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Allo scopo di determinare la sua forma analitica osserviamo che se $x \in [0, 1]$, è certamente $f(x) = x$ mentre se $x \in]1, 3]$ l'equazione del tratto BD si deduce dalla

$$f(x) - y_B = \left(\frac{y_B - y_D}{x_B - x_D} \right) (x - x_B) \implies f(x) - 1 = -(x - 1)$$

e quindi

$$f(x) = -x + 2 \quad \text{se} \quad 1 < x \leq 3.$$

Analogamente

$$f(x) - y_E = +1(x - x_E) \implies f(x) = x - 4 \quad \text{se} \quad 3 < x \leq 4.$$

Pertanto in $[0, 4]$ la funzione possiede la rappresentazione analitica

$$f(x) : \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ -x + 2, & 1 < x \leq 3 \\ x - 4, & 3 < x \leq 4 \end{cases} \quad (1)$$

1-a. Tale funzione è continua in $\mathbb{R}$ in quanto, nei punti di contatto $x = 0 + 4k$ con $k \in \mathbb{Z}$ il limite destro vale

$$\lim_{x \rightarrow 4k+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = f(0) = 0$$

mentre quello sinistro, per la periodicità, discende dalla

$$\lim_{x \rightarrow 4k-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4k-} (x - 4) = \lim_{x \rightarrow 4-} f(x) = 4 - 4 = 0.$$

Allo stesso modo, nei punti di ascissa $x = 1 + 4k$ ($k \in \mathbb{Z}$) risulta

$$\lim_{x \rightarrow 1+4k-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} x = \lim_{x \rightarrow 1+4k+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (-x + 2) = f(1) = 1$$

così come per $x = 3 + 4k$

$$\lim_{x \rightarrow 3+4k-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} (-x + 2) = \lim_{x \rightarrow 3+4k+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+} (x - 4) = f(3) = -1.$$

Nei punti di $\mathbb{R}$ distinti dai precedenti, la funzione f è rappresentata da polinomi di I grado e questi sono continui in $\mathbb{R}$.

1-b. Non è evidentemente derivabile nei punti angolosi B e D (e associati) cioè in $x = 1 + 4k$ e $x = 3 + 4k$ dove

$$f'_-(1 + 4k) = 1 \neq f'_+(1 + 4k) = -1$$

$$f'_-(3 + 4k) = -1 \neq f'_+(3 + 4k) = 1$$

ossia la derivata sinistra e destra assumono valori diversi. Pertanto la funzione derivata prima $g(x) = f'(x)$ è

$$g(x) : \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ -1, & 1 < x < 3 \\ 1, & 3 < x \leq 4 \end{cases} \quad \text{con} \quad x \in [0, 4] - \{1, 3\}$$

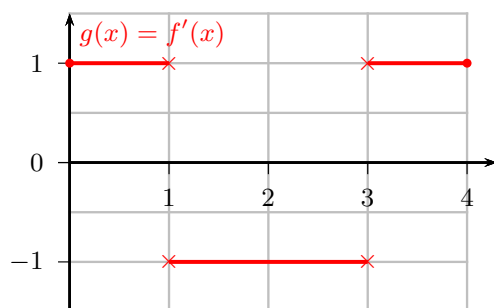


Fig. 2. Grafico di $g(x) = f'(x)$ con $x \in [0, 4]$.

e il suo grafico è riportato in fig. 2.

1-c. Per quanto riguarda l'esistenza dei limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

va rilevato che il primo limite non esiste in quanto la funzione f periodica.

Per calcolare il limite della funzione non periodica $f(x)/x$ per $x \rightarrow +\infty$, osserviamo che, in base al grafico Γ , risultano soddisfatte in $\mathbb{R}$ le disequaglianze

$$-1 \leq f(x) \leq 1$$

dalle quali, dividendo per $x > 0$, discende pure la validità delle

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{1}{x}. \quad (2)$$

poiché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\pm \frac{1}{x} \right) = 0$$

allora, per il teorema del confronto, è pure

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

1-d. Il grafico della funzione

$$h(x) = \int_0^x f(t) dt$$

si ottiene eseguendo esplicitamente l'integrazione al variare dell'estremo superiore negli intervalli definiti in (1). In particolare se $x \in [0, 1]$ si ha

$$h(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x x dx = \frac{1}{2}x^2 \quad \text{se } 0 \leq x \leq 1 \quad (3)$$

e quindi $h(1) = \frac{1}{2}$.

Se $x \in]1, 3]$, suddividiamo l'intervallo $[0, 3] = [0, 1] \cup]1, 3]$ e quindi dalla (1) e per la proprietà dell'integrale di additività rispetto agli estremi discende

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^x f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt = h(1) + \int_1^x f(t) dt \\ &= \frac{1}{2} + \int_1^x (-x + 2) dx \\ &= \frac{1}{2} + \left[-\frac{x^2}{2} + 2x \right]_1^x = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} + 2x - \left(-\frac{1}{2} + 2 \right) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1, \quad \text{con } 1 < x \leq 3 \end{aligned}$$

Pertanto è pure $h(3) = -\frac{9}{2} + 6 - 1 = \frac{1}{2}$.

Allo stesso modo, se $x \in]3, 4]$ con $[0, 4] = [0, 3] \cup]3, 4]$,

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^x f(t) dt = \int_0^3 f(t) dt + \int_3^x f(t) dt = h(3) + \int_3^x f(t) dt \\ &= \frac{1}{2} + \int_3^x (x - 4) dx \\ &= \frac{1}{2} + \left[\frac{x^2}{2} - 4x \right]_3^x = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} - 4x - \left(\frac{9}{2} - 12 \right) \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8, \quad \text{con } 3 < x \leq 4 \end{aligned}$$

e, in definitiva, la funzione $h(x)$ assume la forma analitica

$$h(x) : \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1, & 1 < x \leq 3 \\ \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8, & 3 < x \leq 4. \end{cases} \quad (4)$$

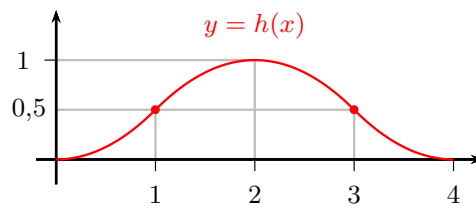


Fig. 3. Grafico di $h(x)$ con $x \in [0, 4]$.

Il suo grafico (fig. 3) è, in $[0, 4]$, unione di 3 archi di parabola: il primo $y_1 = \frac{1}{2}x^2$ con vertice nell'origine, il secondo $y_2 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$ con vertice in $(2, 1)$ e il terzo $y_3 = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 = \frac{1}{2}(x - 4)^2$ con vertice in $(4, 0)$.

2. Perché la funzione

$$s(x) = \text{sen}(bx) \quad (5)$$

abbia la periodicità di $f(x)$ cioè pari a $T = 4$, deve sussistere la relazione

$$T = \frac{2\pi}{b} \implies b = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

per cui la funzione $s(x)$ si riduce a

$$s(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right). \quad (6)$$

Notato che, a) $s(0) = 0$, $s(1) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$, b) la sua derivata prima

$$s'(x) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

assume i valori agli estremi

$$s'(0) = \frac{\pi}{2}, \quad s'(1) = 0,$$

e c) $s'(x) > 0$ in $[0, 1[$, possiamo rappresentare il grafico di $s(x)$ nella figura 4 seguente.

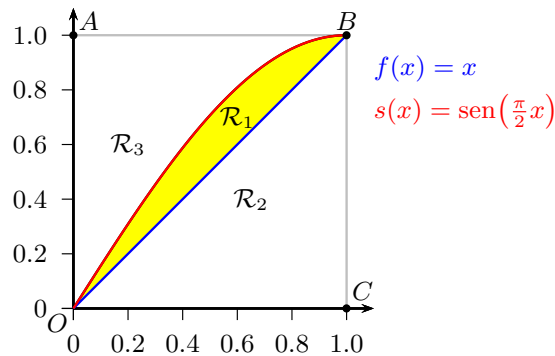


Fig. 4. Grafico di $s(x)$ con $x \in [0, 1]$.

Se $\mathcal{R}_1$ è la regione compresa tra $s(x)$ e $f(x)$, la sua area è data dall'integrale

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}_1) = \int_0^1 \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x \right] dx. \quad (7)$$

Il primo addendo si può ricondurre ad integrazioni elementari se si pone $t = \frac{\pi}{2}x$: si ottiene

$$\int \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = -\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + c$$

mentre il secondo è immediato. Pertanto la (7) si risolve in

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathcal{R}_1) &= \int_0^1 \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x \right] dx \\ &= \left[-\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \\ &= -\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \approx 0,1366. \end{aligned} \quad (8)$$

Poiché $\mathcal{A}(\mathcal{R}_2) = \mathcal{A}(\triangle OCB) = \mathcal{A}(\triangle OBA) = \frac{1}{2}$ (fig. 4), otteniamo per differenza

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}_3) = \mathcal{A}(\triangle OBA) - \mathcal{A}(\mathcal{R}_1) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) = 1 - \frac{2}{\pi} \approx 0,3634.$$

Le probabilità che un punto del quadrato $OABC$ ricada in una delle tre regioni sono evidentemente proporzionali alla certezza che cada nel quadrato medesimo di area unitaria per cui

$$p_1 = \frac{\mathcal{A}(\mathcal{R}_1)}{\mathcal{A}(OABC)} = \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) : 1 = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \approx 0,1366$$

$$p_2 = \frac{\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)}{\mathcal{A}(OABC)} = \frac{1}{2}$$

$$p_3 = \frac{\mathcal{A}(\mathcal{R}_3)}{\mathcal{A}(OABC)} = 1 - \frac{2}{\pi} \approx 0,3634$$

3. Le funzioni $y_1 = [f(x)]^2$ e $y_2 = [s(x)]^2$ sono rappresentate, rispettivamente, dalle equazioni

$$y_1 = x^2, \quad x \in [0, 1] \quad (9)$$

$$y_2 = \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) \quad x \in [0, 1] \quad (10)$$

ed entrambe agli estremi assumono gli stessi valori

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 0^2 = 0 = y_2(0) = \text{sen}^2 0 \\ y_1(1) &= 1^2 = 1 = y_2(1) = \text{sen}^2 \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Inoltre se $0 < x < 1$ è $x^2 < x$ per cui la regione $\mathcal{R}'_2$ sottostante a x^2 si riduce rispetto ad $\mathcal{R}_2$ ossia assumerà un'area minore $\mathcal{A}(\mathcal{R}'_2) < \mathcal{A}(\mathcal{R}_2)$ (si veda la fig. 5). Per lo stesso motivo, poiché

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) < 1$$

se $0 < x < 1$, allora è pure

$$\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) < \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

e quindi la regione $\mathcal{R}_3$ di fig. 4 si espande in $\mathcal{R}'_3$ ossia $\mathcal{A}(\mathcal{R}'_3) > \mathcal{A}(\mathcal{R}_3)$ (fig. 5).

Per determinare come varia l'area della regione compresa tra y_1 e y_2 dobbiamo procedere ad un calcolo esplicito espresso formalmente dall'integrale

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}'_1) = \int_0^1 \left[\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x^2 \right] dx. \quad (11)$$

Passando all'integrazione indefinita, il termine quadratico del seno si può riportare ad uno lineare tramite le formule di bisezione

$$\int \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \int \frac{1 - \cos(\pi x)}{2} dx$$

e quindi ridurre l'integrale alla somma di integrali elementari

$$\begin{aligned}\int \frac{1 - \cos(\pi x)}{2} dx &= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos(\pi x) dx \\ &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2\pi} \sin(\pi x) + c.\end{aligned}$$

È ora possibile il calcolo dell'integrale (11)

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}'_1) = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2\pi} \sin(\pi x) - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{3} - (0) = \frac{1}{6} \approx 0,1667$$

cosicché l'area della regione $\mathcal{R}'_1$ è aumentata in quanto, ripreso il valore (8) di $\mathcal{A}(\mathcal{R}_1)$, risulta $0,1667 > 0,1366$ e quindi $\mathcal{A}(\mathcal{R}'_1) > \mathcal{A}(\mathcal{R}_1)$. Tali variazioni si ripercuotono sulle probabilità per le quali valgono le disuguaglianze

$$p'_1 > p_1; \quad p'_2 < p_2; \quad p'_3 > p_3.$$

Pur non richiesta riportiamo di seguito la rappresentazione grafica delle funzioni $[f(x)]^2$ e $[s(x)]^2$ e, in magenta di $s(x)$, assieme alle regioni finite definite dalle prime due nel quadrato $OABC$.

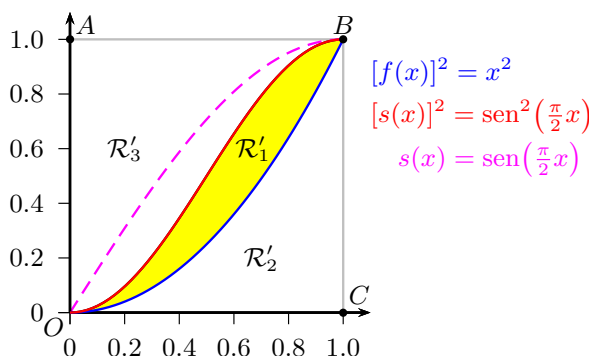


Fig. 5. Grafici di $[f(x)]^2$, $[s(x)]^2$ e $s(x)$ con $x \in [0, 1]$.

4. La restrizione della funzione $h(x)$ all'intervallo $[0, 3]$ risulta (4)

$$h(x) : \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1, & 1 < x \leq 3, \end{cases} \quad (12)$$

mentre per il calcolo del volume $\mathcal{V}$ del solido richiesto applichiamo la formula dei “cilindri” (o dei “gusci cilindrici”) cioè *

$$\mathcal{V} = \int_a^b 2\pi x \cdot h(x) dx$$

* Si veda per la sua deduzione il problema 1 dell'esame 2014 alla pagina 614 della raccolta [ProblemiEsame.pdf](#).

con $a = 0$ e $b = 3$. Poiché la funzione (12) è definita a tratti, l'intervallo di integrazione si può suddividere in $[0, 3] = [0, 1] \cup]1, 3]$ e quindi riportare il calcolo del volume alla somma di integrali

$$\mathcal{V} = \int_0^1 2\pi x \cdot \frac{x^2}{2} dx + \int_1^3 2\pi x \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 \right) dx.$$

Eseguiti i prodotti e fattorizzati i termini costanti, il volume cercato è

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \pi \int_0^1 x^3 dx + \pi \int_1^3 (-x^3 + 4x^2 - 2x) dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 + \pi \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - x^2 \right]_1^3 \\ &= \frac{1}{4}\pi + \pi \left[-\frac{81}{4} + 36 - 9 - \left(-\frac{1}{4} + \frac{4}{3} - 1 \right) \right] \\ &= \pi \left(-\frac{81}{4} + 27 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \\ &= \pi \left(\frac{-243 + 324 + 6 - 4}{12} \right) = \frac{83}{12}\pi. \end{aligned}$$

Quesito n. 1: soluzione. (testo del quesito)

Posto l'integrale definito come

$$E = \int_0^1 x e^x dx, \quad (1)$$

l'integrale

$$\int_0^1 x^2 e^x dx \quad (2)$$

si può riscrivere in forma alternativa se si procede sviluppandolo “*per parti*” individuando il termine x^2 come il fattore finito e $e^x dx$ come il fattore differenziale. Difatti

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \quad (3)$$

per cui, passando all'integrazione definita otteniamo

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = [x^2 e^x]_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x dx = e - 2E \quad (4)$$

che è quanto richiesto dal testo.

Allo stesso modo trattiamo l'integrazione di

$$\int_0^1 x^3 e^x dx.$$

Procediamo quindi integrando per parti identificando x^3 come il fattore finito e $e^x dx$ come quello differenziale

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - \int 3x^2 e^x dx = x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx.$$

Sostituiamo l'ultimo integrale con il risultato (3)

$$\begin{aligned}\int x^3 e^x dx &= x^3 e^x - 3 \left(x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \right) \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \int x e^x dx\end{aligned}$$

ed infine, richiamando la definizione (1), giungiamo ad esprimere l'integrale definito

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^3 e^x dx &= [x^3 e^x - 3x^2 e^x]_0^1 + 6 \int_0^1 x e^x dx \\ &= e - 3e + 6E = -2e + 6E\end{aligned}$$

in termini di e ed E come richiesto.

Quesito n. 2: soluzione. (testo del quesito)

La figura 1 rappresenta una sezione piana passante per il centro O della semisfera di raggio $\overline{OA} = r$: se identifichiamo $\overline{AH} = x$ come la misura dell'altezza del cilindro (torta), la misura del raggio di base $\overline{OH}$ è, per il teorema di Pitagora applicato a $\triangle OHA$,

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

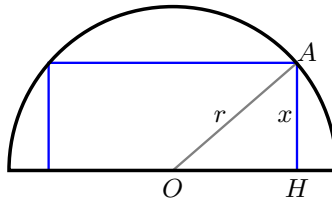


Fig. 1. Sezione piana di semisfera e cilindro inscritto.

Il volume del cilindro inscritto nella semisfera (cupola protettiva) è quindi

$$\begin{cases} \mathcal{V}(x) = \pi \overline{OH}^2 \cdot \overline{AH} = \pi x (r^2 - x^2) \\ 0 \leq x \leq r \end{cases}$$

e di questa grandezza cerchiamo il volume massimo studiando il segno della sua derivata prima

$$\mathcal{V}'(x) = \pi r^2 - \pi \cdot (3x^2) \geq 0.$$

Le soluzioni della disequazioni sono immediate

$$\pi(r^2 - 3x^2) \geq 0 \implies x^2 \leq \frac{r^2}{3} \implies -\frac{r}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{r}{\sqrt{3}}$$

e, rappresentate graficamente dalla fig. 2, mostrano che il massimo del volume viene raggiunto in corrispondenza di $x_m = r/\sqrt{3}$.

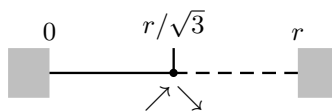


Fig. 2. Segno di $\mathcal{V}'(x)$.

Il volume massimo è quindi

$$\mathcal{V}(max) = \mathcal{V}(x_m) = \pi \frac{r}{\sqrt{3}} \left(r^2 - \frac{r^2}{3} \right) = \frac{2\pi r^3}{3\sqrt{3}}.$$

Poiché il volume della sfera è $\mathcal{V}(sfera) = \frac{4}{3}\pi r^3$ e di conseguenza quello della semisfera $\mathcal{V}(semisfera) = \frac{2}{3}\pi r^3$, il rapporto tra $\mathcal{V}(max)$ e quest'ultimo risulta pari a

$$\frac{\mathcal{V}(max)}{\mathcal{V}(semisfera)} = \frac{2\pi r^3}{3\sqrt{3}} : \left(\frac{2\pi r^3}{3} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Poiché si chiede di dimostrare che la torta occupa meno dei $3/5$ del volume della semisfera, dev'essere verificata la disuguaglianza

$$\frac{\mathcal{V}(max)}{\mathcal{V}(semisfera)} = \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{3}{5}. \quad (1)$$

Difatti questa disuguaglianza è soddisfatta in quanto discende facilmente che

$$\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{3}{5} \implies 5 < 3\sqrt{3} \implies 25 < 9 \cdot 3 \implies 25 < 27$$

e quest'ultima è manifestamente vera.

Quesito n. 3: soluzione. (testo del quesito)

Assegnato il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+2b}-6}{x} = 1, \quad (1)$$

per determinare i parametri a e b procediamo con una riscrittura della funzione ad argomento tramite una razionalizzazione del numeratore. Pertanto (1) diviene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{ax+2b}-6}{x} \cdot \frac{\sqrt{ax+2b}+6}{\sqrt{ax+2b}+6} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax+2b-36}{x(\sqrt{ax+2b}+6)} = 1. \quad (2)$$

Osservando la struttura della funzione in tal modo ottenuta, dobbiamo innanzitutto escludere che sia $a = 0$ in quanto in tal caso sarebbe

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2b-36}{x(\sqrt{2b}+6)} = \infty \quad \text{se} \quad a = 0 \wedge 2b-36 \neq 0,$$

oppure

$$\text{se} \quad a = 0 \wedge 2b-36 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2b-36}{x(\sqrt{2b}+6)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x(6+6)} = 0.$$

D'altra parte se ipotizziamo che sia solo $2b-36 = 0$ cioè $b = 18$, il limite (2) si riduce a

$$a \neq 0 \wedge b = 18 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{x(\sqrt{ax+36}+6)} = 1$$

e possiamo semplificare ulteriormente l'argomento in

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{\sqrt{ax + 36} + 6} = 1.$$

Poiché risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{ax + 36} = \sqrt{0 + 36} = 6,$$

è pure

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{\sqrt{ax + 36} + 6} = \frac{a}{\sqrt{36} + 6} = \frac{a}{12} = 1$$

e quindi il parametro a dovrà assumere necessariamente il valore $a = 12$ per garantire il valore unitario del limite. In definitiva, i valori $a = 12$ e $b = 18$ soddisfano la richiesta del quesito.

Quesito n. 4: soluzione. (testo del quesito)

La funzione densità di probabilità proposta dal quesito è rappresentata dall'equazione

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3 \quad \text{con } x \in [0, 2]. \quad (1)$$

e chiaramente, rappresenta la variabile casuale continua x . Il valor medio (o di aspettazione) $E(x)$ di una variabile continua a valori nell'intervallo $[a, b]$ è definito tramite l'integrale

$$E(x) = \int_a^b x f(x) dx \quad (2)$$

per cui il valor medio richiesto si deduce risolvendo l'integrale

$$E(x) = \int_0^2 x \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3 \right) dx \quad (3)$$

cioè

$$E(x) = \int_0^2 \left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^4 \right) dx.$$

L'integrale indefinito associato si risolve facilmente e fornisce le primitive

$$\int \left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^4 \right) dx = \frac{3}{8}x^4 - \frac{3}{20}x^5 + c$$

per cui l'integrale definito (3) risulta

$$E(x) = \left[\frac{3}{8}x^4 - \frac{3}{20}x^5 \right]_0^2 = \frac{3}{8} \cdot 16 - \frac{3}{20} \cdot 32 - 0 = 6 - \frac{24}{5} = \frac{6}{5}.$$

La probabilità che una variabile casuale continua assuma un ben preciso valore è sempre nulla per cui $P(x = \frac{4}{3}) = 0$ o anche

$$P\left(X = \frac{4}{3}\right) = \int_{\frac{4}{3}}^{\frac{4}{3}} f(x) dx = 0,$$

mentre la probabilità che sia $X \leq 1$, $P(X \leq 1)$ si ottiene dall'integrale

$$P(X \leq 1) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3 \right) dx.$$

Dato che

$$\int \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3 \right) dx = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{16}x^4 + c \quad (4)$$

otteniamo il valore

$$P(X \leq 1) = \left[\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{16}x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{16} = \frac{5}{16}.$$

Seppure non richiesto dal testo verifichiamo che la funzione (1) gode delle proprietà di una densità di probabilità ossia non sia negativa, $f(x) \geq 0$ se $x \in [0, 2]$ e che la probabilità calcolata sull'intero dominio della variabile casuale valga 1 ossia $\int_0^2 f(x) dx = 1$.

Circa la non negatività di $f(x)$ abbiamo che

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3 \geq 0 \implies x^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4}x \right) \geq 0 \implies \frac{3}{2} - \frac{3}{4}x \geq 0 \implies x \leq 2$$

che è soddisfatta nel dominio $x \in [0, 2]$.

Pure la condizione di normalizzazione appare manifestamente soddisfatta in quanto, ripreso l'integrale indefinito (4) risulta

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3 \right) dx = \left[\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{16}x^4 \right]_0^2 = 4 - 3 = 1.$$

Quesito n. 5: soluzione. (testo del quesito)

Se $P(x, y, z)$ è un punto generico della retta r passante per i punti $A(-2, 3, 1)$ e $B(3, 0, -1)$, la sua forma parametrica in un sistema cartesiano $Oxyz$ si deduce dalla relazione vettoriale

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} \quad (1)$$

dove il vettore direzione ha componenti

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \equiv (5, -3, -2) \quad (2)$$

mentre

$$\overrightarrow{OP} = (x - 0, y - 0, z - 0) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{OA} = (-2 - 0, 3 - 0, 1 - 0).$$

Esplicitando le componenti di (1) si ha

$$r : \begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 3 - 3t \\ z = 1 - 2t. \end{cases} \quad (3)$$

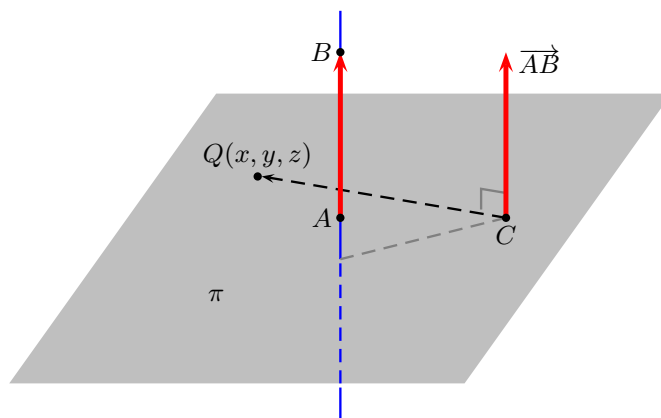


Fig. 1. Retta AB e piano π per C .

Poiché il piano π per $C(2, 2, -3)$ dev'essere perpendicolare alla retta r (fig. 1), sarà caratterizzato da un vettore normale $\vec{n}$ che possiamo identificare con il vettore $\vec{AB} = \vec{n}$ per cui, se $Q(x, y, z)$ rappresenta un punto generico di π il vettore $\vec{CQ}$ dovrà essere perpendicolare ad $\vec{AB}$. La condizione di perpendicolarità tra vettori implica quindi

$$\vec{CQ} \cdot \vec{AB} = 0 \quad (4)$$

con

$$\vec{CQ} = (x - x_C, y - y_C, z - z_C) \equiv (x - 2, y - 2, z + 3).$$

Per la (2), tale prodotto scalare si scrive come

$$5(x - 2) - 3(y - 2) - 2(z + 3) = 0,$$

per cui l'equazione rappresentativa di π è

$$\pi : 5x - 3y - 2z - 10 = 0. \quad (5)$$

Quesito n. 6: soluzione. (testo del quesito)

Il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^a} \quad (1)$$

è evidentemente indeterminato in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\sin(x) - x] = \sin(0) - 0 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^a = 0^a = 0 \quad \text{se } a > 0.$$

Studiamo quindi il limite del rapporto delle derivate del numeratore e del denominatore per analizzare l'eventuale applicabilità del teorema di De L'Hôpital. Il calcolo delle due derivate fornisce il nuovo limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{ax^{a-1}} \quad (2)$$

che, se ricordiamo l'importante limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad (3)$$

possiamo riconoscerlo presente pure nel (2) se poniamo $a - 1 = 2$ ossia con $a = 3$. Con tale valore per il parametro a , il limite (2) si riscrive

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{ax^{a-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3 \cdot x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) \right]$$

per cui, applicando il teorema del prodotto e il risultato (3), discende

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{ax^{a-1}} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}.$$

L'esistenza del limite del rapporto delle derivate ci autorizza ad applicare il teorema di De L'Hôpital cosicché il limite originario (1) deve valere

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} = -\frac{1}{6} \quad \text{con} \quad a = 3.$$

Altri valori del parametro a non soddisfano la condizione che il limite sia un numero reale diverso dallo zero. Difatti se ipotizziamo $a \leq 0$ il limite (1) varrebbe

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^a} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{-a} \cdot [\sin(x) - x] = 0 \cdot 0 = 0$$

mentre se $a > 0 \wedge a \neq 3$ il limite (2) si potrà riscrivere come

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{ax^{a-1}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) \cdot \left(-\frac{x^2}{ax^{a-1}} \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) \cdot \left(-\frac{x^{3-a}}{a} \right) = \frac{1}{2} \cdot 0 \quad \text{se} \quad 0 < a < 3, \end{aligned}$$

mentre nel caso sia $a > 3$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) \cdot \left(-\frac{x^{3-a}}{a} \right) = \infty \quad (a > 3)$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{x^{3-a}}{a} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{ax^{a-3}} \right) = \infty.$$

Quesito n. 7: soluzione. (testo del quesito)

Data l'equazione cartesiana del piano π

$$\pi : x + 2y - z + 1 = 0, \quad \text{e il suo punto} \quad P(x_P, y_P, z_P) \equiv (1, 0, 2), \quad (1)$$

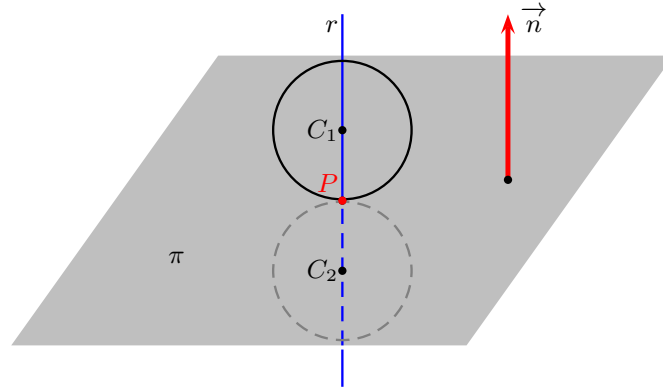


Fig. 1. Piano π e sfere tangenti in P .

le componenti del vettore $\vec{n}$ perpendicolare a π (fig. 1) sono rappresentate dai coefficienti delle tre variabili in (1) $(1, 2, -1)$ per cui è

$$\vec{n}(n_x, n_y, n_z) = (1, 2, -1). \quad (2)$$

Poiché i centri delle sfere tangenti a π nel punto P devono appartenere alla retta r perpendicolare a π in P (fig. 1), detto $Q(x, y, z)$ un suo punto generico, tale retta si rappresenta sinteticamente tramite la condizione di collinearità dei vettori $\overrightarrow{PQ}$ e $\vec{n}$ ossia $\overrightarrow{PQ} = t \cdot \vec{n}$ che, comunque, si esplicita nella forma parametrica

$$r : \begin{cases} x - x_P = t \cdot n_x \\ y - y_P = t \cdot n_y \\ z - z_P = t \cdot n_z \end{cases} \quad \text{ossia} \quad r : \begin{cases} x - 1 = t \\ y - 0 = 2t \\ z - 2 = -t. \end{cases} \quad (3)$$

Per determinare i centri C delle sfere tangenti in P non rimane che individuare i punti Q di r con distanza da P pari al raggio $\sqrt{6}$ (oppure che $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{6}$) cioè imporre la condizione

$$\overline{QP} = \sqrt{6} \quad \text{oppure} \quad \overline{QP}^2 = 6.$$

Per la (3) quest'ultima condizione si riscrive come

$$(x - 1)^2 + (y - 0)^2 + (z - 2)^2 = 6,$$

equazione che si riduce ad un'unica incognita $t^2 + (2t)^2 + (-t)^2 = 6$ non appena si sostituiscono le coordinate (3) di Q in termini del parametro. Individuate le sue soluzioni

$$t^2 + 4t^2 + t^2 = 6 \implies 6t^2 = 6 \implies t = \pm 1,$$

non rimane che sostituire questi valori nella (3) per ottenere i centri delle due sfere. Le rispettive coordinate sono

$$\begin{aligned} C_1(1 + 1, 2 \cdot 1, 2 - 1) &\equiv (2, 2, 1) \\ C_2(1 - 1, 2(-1), 2 + 1) &\equiv (0, -2, 3). \end{aligned}$$

Quesito n. 8: soluzione. (testo del quesito)

Sia $p_3 = p$ la probabilità di uscita della faccia truccata cioè della faccia contrassegnata dal numero 3. Poiché la probabilità p_i di uscita delle rimanenti 11 facce è, come definito dal testo, pari alla metà, allora dev'essere

$$p_i = \frac{p}{2} \quad \text{con } i = 1, 2, 4, \dots, 11, 12.$$

Essendo l'uscita di un numero un evento incompatibile con i restanti, il teorema delle probabilità totali assicura che la probabilità P di uscita di un qualsiasi numero tra 1 e 12 debba soddisfare la condizione

$$P(\text{uscita di un qualsiasi numero}) = \sum_{i=1}^{12} p_i = 11 \cdot \left(\frac{p}{2}\right) + p = 1. \quad (1)$$

Quest'ultima si traduce in una equazione nell'incognita p che risolviamo

$$\frac{11}{2}p + p = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{13}{2}p = 1 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{2}{13} \quad (2)$$

che, in percentuale, fornisce il valore $p = 15,38\%$.

Per determinare la probabilità P che in 5 lanci del dado la faccia 3 esca almeno 2 volte ossia, simbolicamente, $P(k \geq 2, n = 5)$, lo schema da applicare è quello tipico della distribuzione binomiale dove su n prove si presentino k successi ciascuno dei quali abbia la probabilità p di accadere in una singola prova (e $1 - p$ di non accadere). Pertanto dev'essere

$$P(k \geq 2, n = 5) = \sum_{i=2}^5 \binom{5}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{5-i} \quad (3)$$

e per il suo calcolo, conviene utilizzare la probabilità dell'evento contrario e quindi

$$P(k \geq 2, n = 5) = 1 - \sum_{i=0}^1 \binom{5}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{5-i}. \quad (4)$$

Considerando il valore dato dalla (2) l'espansione della precedente diviene

$$\begin{aligned} P(k \geq 2, n = 5) &= 1 - \binom{5}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^5 - \binom{5}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^4 \\ &= 1 - \left(1 - \frac{2}{13}\right)^5 - 5 \cdot \frac{2}{13} \left(1 - \frac{2}{13}\right)^4 \\ &= 1 - \left(\frac{11}{13}\right)^5 - 5 \cdot \frac{2 \cdot 11^4}{13^5} = 1 - \frac{11^4}{13^5} (11 + 10) \\ &= 1 - \frac{11^4}{13^5} \cdot 21 \approx 0,1719 \end{aligned}$$

e, in definitiva, la probabilità richiesta è $P(k \geq 2, n = 5) \approx 17\%$.

Quesito n. 9: soluzione. (testo del quesito)

L'esistenza di un'unica soluzione reale dell'equazione

$$\operatorname{arctg}(x) + x^3 + e^x = 0 \quad (1)$$

si può riportare alla studio della funzione

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x) + x^3 + e^x \quad \text{con dominio } x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Osserviamo innanzitutto i limiti agli estremi del dominio: poiché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2} \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

risulta pure

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (3)$$

così come i limiti

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg}(x) = -\frac{\pi}{2} \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

giustificano l'ulteriore risultato

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty. \quad (4)$$

Notiamo inoltre che la funzione f è continua in $\mathbb{R}$ in quanto somma di funzioni continue e quindi il segno dei precedenti due limiti suggerisce che il grafico di tale funzione potrà intersecare l'asse della variabile x in almeno un punto: ne segue che l'equazione $f(x) = 0$ potrà avere almeno una soluzione.

Poiché il segno della derivata prima è

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + 3x^2 + e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

la funzione (2) è monotona crescente nel dominio e quindi $f(x) = 0$ dovrà avere una sola soluzione. Di conseguenza, per poter applicare il teorema degli zeri dobbiamo individuare un intervallo chiuso agli estremi del quale i valori della funzione siano opposti in segno. A tal fine osserviamo che

$$\begin{aligned} f(0) &= \operatorname{arctg}(0) + 0^3 + e^0 = 1 > 0 \\ f(-1) &= \operatorname{arctg}(-1) + (-1)^3 + e^{-1} = -\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{e} < 0 \end{aligned}$$

per cui il teorema è applicabile in $[-1, 0]$ e assicura l'esistenza di un unico valore $\alpha \in]-1, 0[$ tale che $f(\alpha) = 0$ cioè sia $\operatorname{arctg}(\alpha) + \alpha^3 + e^\alpha = 0$.

Quesito n. 10: soluzione. (testo del quesito)

Il grafico della funzione

$$f(x) = |4 - x^2| \quad (1)$$

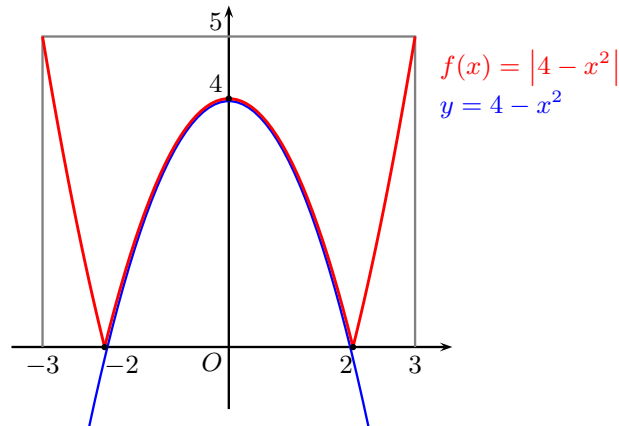


Fig. 1. Grafico di $f(x) = |4 - x^2|$ e della parabola $y = 4 - x^2$.

è deducibile con facilità da quello della parabola di equazione $y = 4 - x^2$ (fig. 1). Quest'ultima ha vertice nel punto $(0, 4)$ ed interseca l'asse delle x in $x = \pm 2$. Poiché il valore assoluto di una funzione agisce sul grafico capovolgendone la parte sottostante all'asse x , il grafico di $f(x)$ dovrà presentare in $x = \pm 2$ due punti angolosi dove quindi non potrà esistere la derivata prima $f'(x)$. Pertanto non sarà applicabile il teorema di Rolle nell'intervallo $[-3, 3]$ essendo una sua ipotesi la derivabilità della funzione in $] - 3, 3[$.

Procedendo formalmente, riscriviamo la (1) come

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & \text{se } -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4, & \text{se } x < -2 \text{ o } x > 2, \end{cases}$$

e notiamo la continuità della $f(x)$ in $[-3, 3]$ e, in particolare, nei punti di ascissa $x = \pm 2$ in quanto valgono i limiti

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} (4 - x^2) &= f(2) = 4 - 4 = 0 = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 4) \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} (x^2 - 4) &= f(-2) = 4 - 4 = 0 = \lim_{x \rightarrow -2^+} (4 - x^2). \end{aligned}$$

Per la derivata prima di $f(x)$ si ha invece

$$f'(x) = \begin{cases} -2x, & -2 < x < 2 \\ 2x, & x < -2 \text{ o } x > 2 \end{cases}$$

e poiché

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (-2x) = -4 \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x) = 4,$$

i limiti destro e sinistro in $x = 2$ sono diversi e non può, come previsto, esistere la $f'(2)$. Allo stesso modo non esiste $f'(-2)$ dato che

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} (2x) = -4 \neq \lim_{x \rightarrow -2^+} (-2x) = 4.$$

Con tutta evidenza in $x = 0$ è invece $f'(0) = -2 \cdot 0 = 0$ ma tale esempio non contraddice il teorema in quanto se le ipotesi di un teorema non sono soddisfatte, la rispettiva tesi può essere sia vera che falsa. Ciò accade in quanto le ipotesi, per la dimostrazione di una tesi di un teorema, stabiliscono solo delle condizioni sufficienti ma, se non dichiarate esplicitamente nell'enunciato, non necessarie.

ESAME 2018

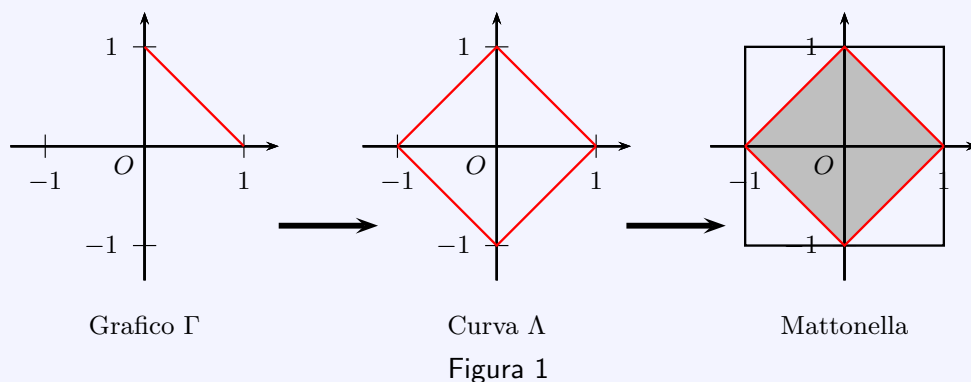
Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

• Problema n. 1

Devi programmare il funzionamento di una macchina che viene adoperata nella produzione industriale di mattonelle per pavimenti. Le mattonelle sono di forma quadrata di lato l (in un'opportuna unità di misura) e le fasi di lavoro sono le seguenti:

- si sceglie una funzione $y = f(x)$ definita e continua nell'intervallo $[0, 1]$, che soddisfi le condizioni:
 - a) $f(0) = 1$;
 - b) $f(1) = 0$;
 - c) $0 < f(x) < 1$ per $0 < x < 1$.
- La macchina traccia il grafico Γ della funzione $y = f(x)$ e i grafici simmetrici di Γ rispetto all'asse y , all'asse x e all'origine O , ottenendo in questo modo una curva chiusa Λ , passante per i punti $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$, simmetrica rispetto agli assi cartesiani e all'origine, contenuta nel quadrato Q di vertici $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$.
- La macchina costruisce la mattonella colorando di grigio l'interno della curva chiusa Λ e lasciando bianca la parte restante del quadrato Q ; vengono quindi mostrate sul display alcune mattonelle affiancate, per dare un'idea dell'aspetto del pavimento.

Il manuale d'uso riporta un esempio del processo realizzativo di una mattonella semplice:



La pavimentazione risultante è riportata di seguito:

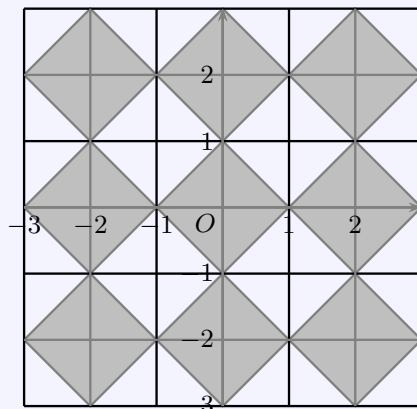


Figura 2

1. Con riferimento all'esempio, determina l'espressione della funzione $y = f(x)$ e l'equazione della curva Λ , così da poter effettuare una prova e verificare il funzionamento della macchina.

Ti viene richiesto di costruire una mattonella con un disegno più elaborato che, oltre a rispettare le condizioni a), b) e c) descritte in precedenza, abbia $f'(0) = 0$ e l'area della parte colorata pari a 55% dell'area dell'intera mattonella. A tale scopo, prendi in considerazione funzioni polinomiali di secondo grado e di terzo grado.

2. Dopo aver verificato che non è possibile realizzare quanto richiesto adoperando una funzione polinomiale di secondo grado, determina i coefficienti $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ della funzione $f(x)$ polinomiale di terzo grado che soddisfa le condizioni poste. Rappresenta infine in un piano cartesiano la mattonella risultante.

Vengono proposti a un cliente due tipi diversi di disegno, derivanti rispettivamente dalle funzioni $a_n(x) = 1 - x^n$ e $b_n(x) = (1 - x)^n$, considerate per $x \in [0, 1]$, con n intero positivo.

3. Verifica che al variare di n tutte queste funzioni rispettano le condizioni a), b), e c). Dette $A(n)$ e $B(n)$ le aree delle parti colorate delle mattonelle ottenute a partire da tali funzioni a_n e b_n , calcola $\lim_{n \rightarrow +\infty} A(n)$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} B(n)$ ed interpreta i risultati in termini geometrici.

Il cliente decide di ordinare 5.000 mattonelle con il disegno derivato da $a_2(x)$ e 5.000 con quello derivato da $b_2(x)$. La verniciatura viene effettuata da un braccio meccanico che, dopo aver depositato il colore, torna alla posizione iniziale sorvolando la mattonella lungo la diagonale. A causa di un malfunzionamento, durante la produzione delle 10.000 mattonelle si verifica con una probabilità del 20% che il braccio meccanico lasci cadere una goccia di colore in un punto a caso lungo la diagonale, macchiando così la mattonella appena prodotta.

4. Fornisci una stima motivata del numero di mattonelle che, avendo una macchia nella parte non colorata, risulteranno danneggiate al termine del ciclo di produzione.

Soluzione

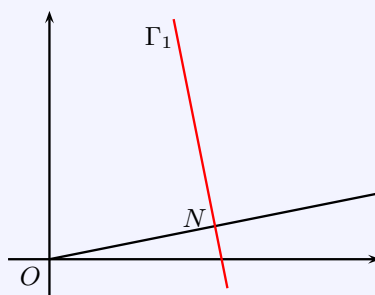
• Problema n. 2

Consideriamo la funzione $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$f_k(x) = -x^3 + kx + 9$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

1. Detto Γ_k il grafico della funzione, verifica che per qualsiasi valore del parametro k la retta r_k , tangente a Γ_k nel punto di ascissa 0 e la retta s_k , tangente a Γ_k nel punto di ascissa 1, si incontrano in un punto M di ascissa $\frac{2}{3}$.
2. Dopo aver verificato che $k = 1$ è il massimo intero positivo per cui l'ordinata del punto M è minore di 10, studia l'andamento della funzione $f_1(x)$, determinandone i punti stazionari e di flesso e tracciandone il grafico.
3. Detto T il triangolo delimitato dalle rette r_1 , s_1 e dall'asse delle ascisse, determina la probabilità che, preso a caso un punto $P(x_P, y_P)$ all'interno di T , questo si trovi al di sopra di Γ_1 (cioè che si abbia $y_P > f_1(x)$ per tale punto P).
4. Nella figura è evidenziato un punto $N \in \Gamma_1$ e un tratto del grafico Γ_1 . La retta normale a Γ_1 in N (vale a dire la perpendicolare alla retta tangente a Γ_1 in quel punto) passa per l'origine degli assi O . Il grafico Γ_1 possiede tre punti con questa proprietà. Dimostra, più in generale, che il grafico di un qualsiasi polinomio di grado $n > 0$ non può possedere più di $2n - 1$ punti nei quali la retta normale al grafico passa per l'origine.



Soluzione

Questionario

1. Dimostrare che il volume di un cilindro inscritto in un cono è minore della metà del volume del cono.

Soluzione

2. Si dispone di due dadi uguali non bilanciati a forma di tetraedro regolare con le facce

numerate da 1 a 4. Lanciando ciascuno dei due dadi, la probabilità che esca 1 è il doppio della probabilità che esca 2, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 3, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 4. Se si lanciano i due dadi contemporaneamente, qual è la probabilità che escano due numeri uguali tra loro?

Soluzione

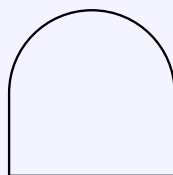
3. Determinare i valori di k tali che la retta di equazione $y = -4x + k$ sia tangente alla curva di equazione $y = x^3 - 4x^2 + 5$.

Soluzione

4. Considerata la funzione $f(x) = \frac{3x - e^{\sin x}}{5 + e^{-x} - \cos x}$, determinare, se esistono, i valori di $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, giustificando adeguatamente le risposte fornite.

Soluzione

5. Con una staccionata lunga 2 metri si vuole recintare una superficie avente la forma di un rettangolo sormontato da una semicirconferenza, come in figura:



Determinare le dimensioni dei lati del rettangolo che consentono di recintare la superficie di area massima.

Soluzione

6. Determinare l'equazione della superficie sferica S , con centro sulla retta

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = t, \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \text{ tangente al piano } \pi: 3x - y - 2z + 14 = 0 \text{ nel punto } T(-4, 0, 1).$$

Soluzione

7. Determinare a in modo che

$$\int_a^{a+1} (3x^2 + 3) dx$$

sia uguale a 10.

Soluzione

8. In un gioco a due giocatori, ogni partita vinta frutta 1 punto e vince chi per primo raggiunge 10 punti. Due giocatori che in ciascuna partita hanno la stessa probabilità di vincere si sfidano. Qual è la probabilità che uno dei due giocatori vinca in un numero di partite minore o uguale a 12?

Soluzione

9. Sono dati, nello spazio tridimensionale, i punti $A(3, 1, 0)$, $B(3, -1, 2)$, $C(1, 1, 2)$. Dopo aver verificato che ABC è un triangolo equilatero e che è contenuto nel piano α di equazione $x + y + z - 4 = 0$, stabilire quali sono i punti P tali che $ABCP$ sia un tetraedro regolare.

Soluzione

10. Determinare quali sono i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per cui la funzione $y(x) = 2e^{kx+2}$ è soluzione dell'equazione differenziale $y'' - 2y' - 3y = 0$.

Soluzione

Problema n. 1: soluzione. (testo del problema)

1. Le condizioni sulla generica funzione $f(x)$ sono espresse nel sistema

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 0 \\ 0 < f(x) < 1 \text{ per } 0 < x < 1, \end{cases} \quad (1)$$

mentre l'espressione della funzione riportata come esempio e avente come grafico il segmento di retta è rappresentata dalle relazioni

$$y = f(x) = -x + 1 \quad \text{con} \quad 0 < x < 1 \wedge y > 0. \quad (2)$$

Queste condizioni costituiscono per la curva Λ , la sua parte Λ_1 contenuta nel primo quadrante. Applicando alle (2) una simmetria di asse y di equazioni $y' = y$ e $x' = -x$ si ottiene la relazione tra le coordinate

$$y' = -(-x') + 1 \quad 0 < -x' < 1 \wedge y' > 0$$

da cui, lasciando cadere gli apici, otteniamo la rappresentazione di Λ nel II quadrante

$$\Lambda_2: y = x + 1 \quad \text{se} \quad -1 < x < 0 \wedge y > 0. \quad (3)$$

Allo stesso modo, applicando le equazioni di una simmetria di asse x , $x' = x$ e $y' = -y$ alle due precedenti otteniamo

$$\Lambda_3: -y' = -x' + 1, \quad 0 < x' < 1 \wedge -y' > 0$$

da cui

$$y = x - 1, \quad 0 < x < 1 \wedge y < 0$$

e

$$\begin{aligned} \Lambda_4: -y' &= x' + 1, & -1 < x' < 0 \wedge -y' > 0 \\ y &= -x - 1, & -1 < x < 0 \wedge y < 0. \end{aligned}$$

La curva Λ è quindi rappresentata dalle equazioni

$$\Lambda: \begin{cases} y = -x + 1, & 0 \leq x \leq 1 \wedge y \geq 0 \\ y = x + 1, & -1 \leq x < 0 \wedge y \geq 0 \\ y = x - 1, & 0 \leq x \leq 1 \wedge y < 0 \\ y = -x - 1, & -1 \leq x < 0 \wedge y < 0, \end{cases}$$

ma, date le sue simmetrie, si può esprimere pure in forma più compatta tramite l'equazione implicita

$$\Lambda: |y| = -|x| + 1. \quad (4)$$

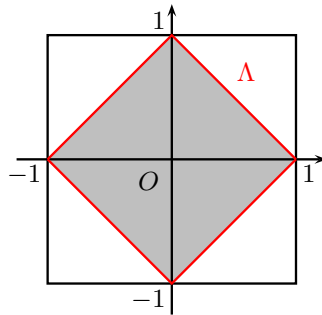


Fig. 1. Grafico della curva esempio Λ e mattonella.

2. Alle condizioni (1) poste inizialmente sulla funzione $f(x)$ va ora aggiunta la condizione sulla sua derivata $f'(0) = 0$ e sulla frazione colorata dell'area $\mathcal{A}_m$ della mattonella. Quest'ultima è pari all'area del quadrato di lato 2 per cui $\mathcal{A}_m = 4$ e, tenuto presente che l'area compresa tra il grafico della curva Λ e l'asse x nel I quadrante è data dall'integrale definito $\int_0^1 f(x) dx$ e che, per simmetria, questo valore va moltiplicato per 4, la seconda condizione si traduce formalmente nell'integrale

$$4 \cdot \int_0^1 f(x) dx = 0,55 \cdot \mathcal{A}_m \quad \text{da cui} \quad \int_0^1 f(x) dx = 0,55.$$

Le nuove condizioni richieste sono allora

$$\begin{cases} f(0) = 1, \\ f(1) = 0, \\ f'(0) = 0, \\ \int_0^1 f(x) dx = 0,55 \end{cases} \quad (5)$$

cui vanno aggiunte le disuguaglianze $0 < f(x) < 1$ per $0 < x < 1$.

Nell'ipotesi che $f(x)$ sia rappresentata da una funzione polinomiale di secondo grado ossia abbia la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $f'(x) = 2ax + b$, le precedenti condizioni impongono

$$f(0) = 1 \quad 1 = 0 + 0 + c \quad \Rightarrow \quad c = 1; \quad (6)$$

$$f(1) = 0 \quad 0 = a + b + 1 \quad \Rightarrow \quad a + b = -1; \quad (7)$$

$$f'(0) = 0 \quad 0 = 0 + b \quad \Rightarrow \quad b = 0 \quad (8)$$

per cui, dalla (7) è pure $a = -1$. Pertanto la funzione quadratica è $f(x) = -x^2 + 1$ ma con tale risultato l'ultima condizione non viene soddisfatta in quanto

$$\int_0^1 (-x^2 + 1) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 = -\frac{1}{3} + 1 - 0 = \frac{2}{3} \approx 0,66 \neq 0,55.$$

Se invece il polinomio è di terzo grado $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, le medesime condizioni implicano

$$f(0) = 1 \quad 1 = 0 + 0 + 0 + d \quad \Rightarrow \quad d = 1; \quad (9)$$

$$f(1) = 0 \quad 0 = a + b + c + 1; \quad (10)$$

$$f'(0) = 0 \quad 0 = 0 + 0 + c \quad \Rightarrow \quad c = 0 \quad (11)$$

cosicché l'ultima diviene

$$\int_0^1 (ax^3 + bx^2 + 0x + 1) dx = 0,55 \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + x \right]_0^1 = \frac{55}{100}$$

cioè

$$\frac{a}{4} + \frac{b}{3} + 1 = \frac{11}{20}. \quad (12)$$

Quest'ultima, assieme alla (10) riscritta come $a = -1 - b$ permette di determinare i coefficienti a e b

$$-\frac{1}{4} - \frac{b}{4} + \frac{b}{3} + 1 = \frac{11}{20}, \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{12} = \frac{11-15}{20} \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{12}{5} \wedge a = \frac{7}{5}.$$

La funzione $f(x)$ è quindi

$$f(x) = \frac{7}{5}x^3 - \frac{12}{5}x^2 + 1 \quad (13)$$

e poiché tale polinomio possiede una radice in $x = 1$ in quanto $f(1) = 0$ si può scomporre con "Ruffini"

1	$\frac{7}{5}$	$-\frac{12}{5}$	0	1
	$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{5}$	-1	-1
	$\frac{7}{5}$	-1	-1	0

nel prodotto di fattori

$$f(x) = (x - 1) \left(\frac{7}{5}x^2 - x - 1 \right). \quad (14)$$

Per rappresentare la mattonella risultante da questa funzione va evidentemente studiato il grafico di tale funzione cubica nell'intervallo $[0, 1]$. Pertanto, i fattori che contribuiscono al suo segno sono

$$x - 1 \geq 0 \implies x \geq 1,$$

$$\frac{7}{5}x^2 - x - 1 \geq 0 \implies x_{12} = \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{28}{5}}\right) \cdot \frac{5}{14} = \frac{5}{14} \pm \frac{5}{14}\sqrt{\frac{33}{5}}$$

da cui

$$x \leq \frac{5}{14} - \frac{5}{14}\sqrt{\frac{33}{5}} \quad \vee \quad x \geq \frac{5}{14} + \frac{5}{14}\sqrt{\frac{33}{5}}$$

e, in forma approssimata

$$x \leq -0,5604 \quad \vee \quad x \geq 1,2747.$$

Nella fig. 2 riassumiamo il segno di questi fattori in $x \in [0, 1]$ che garantiscono un prodotto positivo e quindi la validità della condizione $f(x) > 0$.

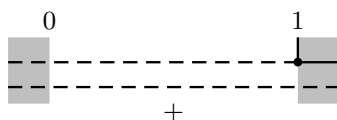


Fig. 2. Segno di $f(x)$ in $[0, 1]$.

Lo studio del segno della derivata prima implica

$$f'(x) = \frac{21}{5}x^2 - \frac{24}{5}x \geq 0 \implies 21x^2 - 24x \geq 0 \implies x \leq 0 \quad \vee \quad x \geq \frac{24}{21}$$

per cui in $x \in [0, 1]$ è $f'(x) < 0$ (fig. 3).

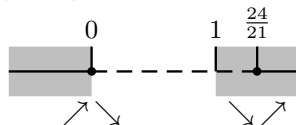


Fig. 3. Segno di $f'(x)$ in $[0, 1]$.

Come imposto dal testo, la funzione possiede derivata nulla in $x = 0$ dove essa possiede un massimo relativo che sappiamo essere unitario per la condizione $f(0) = 1$: è quindi soddisfatta pure la condizione $f(x) < 1$. Il relativo grafico è riportato nella figura 4 mentre la curva Λ associata è espressa dall'equazione

$$|y| = \frac{7}{5}|x^3| - \frac{12}{5}x^2 + 1$$

e permette di ottenere la mattonella di figura 5.

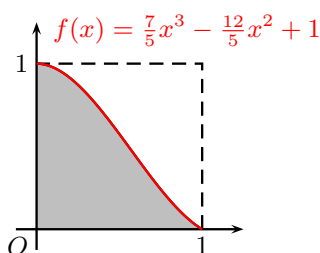


Fig. 4. Grafico della funzione $f(x)$ in $[0, 1]$.

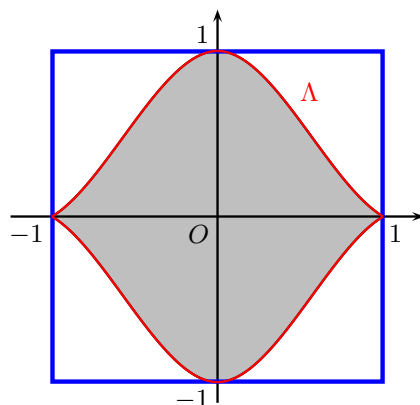


Fig. 5. Grafico della curva Λ e mattonella.

3. Assegnate le funzioni

$$a_n(x) = 1 - x^n, \quad b_n(x) = (1 - x)^n \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{N}_0 \wedge 0 \leq x \leq 1 \quad (15)$$

queste verificano la condizione $f(0) = 1$ in quanto

$$a_n(0) = 1 - 0^n = 1, \quad b_n(0) = (1 - 0)^n = 1^n = 1$$

così come la $f(1) = 0$

$$a_n(1) = 1 - 1^n = 1 - 1 = 0, \quad b_n(1) = (1 - 1)^n = 0^n = 0.$$

Inoltre

$$\begin{cases} 1 - x^n \geq 0 \\ 1 - x^n \leq 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x^n \leq 1 \\ x^n \geq 0 \end{cases}$$

ma poiché $x \in [0, 1]$ ne discende pure

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Analogamente per $b_n(x)$, se $x \in [0, 1]$ è pure $1 - x \geq 0$ e quindi,

$$\begin{cases} (1 - x)^n \geq 0 \\ (1 - x)^n \leq 1 \end{cases} \implies \begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ 1 - x \leq 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Per quanto riguarda le aree $A(n)$ e $B(n)$ delle regioni da colorare, queste discendono dagli integrali

$$A(n) = 4 \cdot \int_0^1 (1 - x^n) dx, \quad B(n) = 4 \cdot \int_0^1 (1 - x)^n dx, \quad (16)$$

dove il fattore 4 tiene presente la simmetria delle corrispondenti curve Λ . Il calcolo del primo integrale riporta alla primitiva

$$A(n) = 4 \left[x - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = 4 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{4n}{n+1}, \quad (17)$$

mentre per il secondo, osservato che $d(1-x) = -dx$ ed eseguita tale sostituzione nella seconda delle (16), abbiamo

$$\begin{aligned} B(n) &= -4 \int_0^1 (1-x)^n \cdot d(1-x) \\ &= -4 \left[\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = -4 \left(0 - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{4}{n+1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Lo studio del limite di queste aree per $n \rightarrow +\infty$ dà, rispettivamente per $A(n)$ e $B(n)$, i risultati seguenti:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} A(n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4n}{n+1} \right) = 4 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} B(n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{n+1} \right) = 0 \end{aligned}$$

giustificati, nel primo caso, dall'uguale grado del numeratore e del denominatore nella funzione razionale fratta ad argomento del limite, mentre nel secondo caso il grado del denominatore è maggiore di quello del numeratore.

L'interpretazione geometrica che se ne può dare consiste nell'osservare che,

- nel caso delle funzioni $a_n(x)$ le mattonelle al crescere di n saranno via via riempite di color grigio e, al limite, completamente grigie.
- Al contrario per le funzioni $b_n(x)$ e al crescere di n , le mattonelle presenteranno un'area colorata sempre più ridotta e, al limite, saranno bianche.

Pur non richieste, nelle figure 6 e 7 sono rappresentate le curve Λ corrispondenti alle funzioni $a_n(x)$ e $b_n(x)$ con $n = 1 \dots 10$.

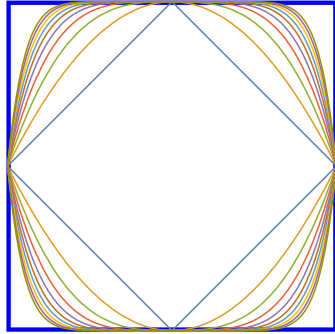


Fig. 6. Funzioni $a_n(x)$.

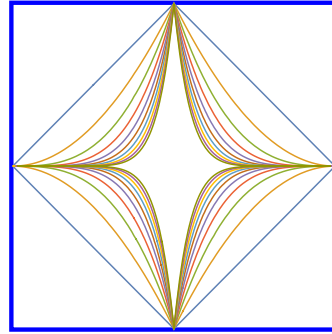
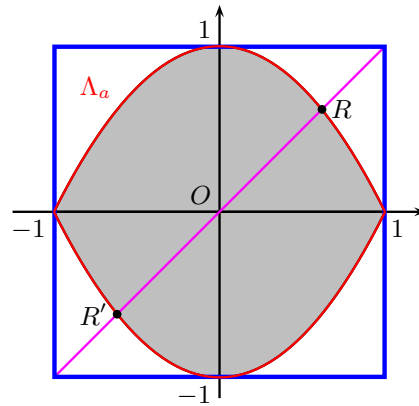
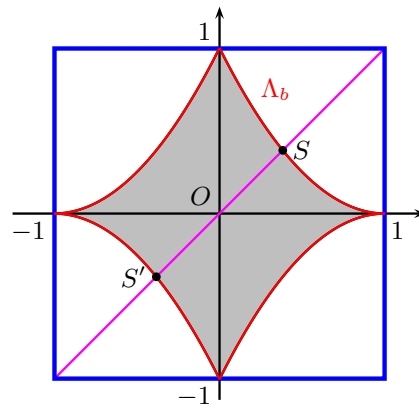


Fig. 7. Funzioni $b_n(x)$.

4. In corrispondenza della scelta del cliente, le funzioni

$$a_2(x) = 1 - x^2, \quad b_2(x) = (1 - x)^2, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (19)$$

rappresentano rispettivamente un arco di parabola con il vertice in $(0,1)$ e concavità nel verso negativo dell'asse verticale, mentre $b_2(x)$ è rappresentata, pure da un arco di

Fig. 8. Grafico della curva Λ_a e mattonella.Fig. 9. Grafico della curva Λ_b e mattonella.

parabola, ma con vertice in $(1, 0)$ e concavità nel verso opposto. Le corrispondenti curve Λ_a e Λ_b definiscono le mattonelle di fig. 8 e fig. 9 dove si è tracciata pure la diagonale principale di ciascuna mattonella.

Per determinare la probabilità che venga prodotta una mattonella difettosa ossia compaia una macchia di colore all'esterno del disegno centrale va determinata la lunghezza delle parti di diagonale di colore bianco. A tale scopo determiniamo le coordinate delle coppie di punti R e R' e S e S' delle due mattonelle (figure 8 e 9).

Nel primo caso va risolto il sistema tra la funzione $a_2(x)$ e la diagonale $y = x$ cioè

$$\begin{cases} y = x \\ y = 1 - x^2 \end{cases} \implies x = 1 - x^2 \implies x^2 + x - 1 = 0$$

da cui

$$x_R = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \text{per cui} \quad x_R = y_R = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

La distanza del punto R dall'origine è

$$\overline{OR} = \sqrt{2} x_R = \sqrt{2} \cdot \frac{(-1 + \sqrt{5})}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

per cui la parte bianca è data dalla differenza della diagonale della mattonella $2\sqrt{2}$ con $2\overline{OR}$ ossia

$$\begin{aligned}\text{lunghezza parte bianca} &= 2\sqrt{2} - 2\overline{OR} \\ &= 2\sqrt{2} - 2 \cdot \frac{(-1 + \sqrt{5})}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} (2 + 1 - \sqrt{5}) \\ &= \sqrt{2} (3 - \sqrt{5}).\end{aligned}$$

Per ottenere la probabilità p_1 di una mattonella difettosa tale lunghezza va rapportata alla lunghezza dell'intera diagonale

$$p_1 = \frac{\sqrt{2} (3 - \sqrt{5})}{2\sqrt{2}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad (20)$$

e poiché $p_2 = 20\% = 0,2 = 1/5$ è la probabilità che il braccio meccanico lasci cadere una goccia lungo la diagonale, la probabilità dell'evento intersezione

$$\{\text{cade goccia sulla diagonale}\} \cap \{\text{cade goccia sulla parte bianca}\}, \quad (21)$$

è data dal prodotto

$$p_a = p_1 \cdot p_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3 - \sqrt{5}}{10}.$$

Il numero n_a di mattonelle difettose su 5000 pezzi prodotti è quindi

$$\frac{n_a}{5000} = p_a \implies n_a = \frac{3 - \sqrt{5}}{10} \cdot 5000 \approx 382. \quad (22)$$

Procediamo allo stesso modo pure per le mattonelle con il disegno collegato alla curva Λ_b (fig. 9). Pertanto le coordinate dei punti S e S' si ottengono dal sistema

$$\begin{cases} y = x \\ y = (1 - x)^2 \end{cases} \implies x = 1 + x^2 - 2x \implies x^2 - 3x + 1 = 0$$

da cui

$$x_S = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \implies x_S = y_S = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

e quindi

$$\overline{OS} = \sqrt{2} x_S = \frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

e la probabilità di una mattonella difettosa è

$$p'_1 = \frac{2\sqrt{2} - 2\overline{OS}}{2\sqrt{2}} = 1 - \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

e quella dell'evento intersezione (21) è

$$p_b = p'_1 \cdot p_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{10}.$$

Infine il numero n_b di mattonelle difettose è in tal caso

$$\frac{n_b}{5000} = p_b \implies n_b = 5000 \cdot \frac{-1 + \sqrt{5}}{10} \approx 618 \quad (23)$$

maggiore che nel caso precedente data la maggiore lunghezza del tratto bianco sulla mattonella. In definitiva per (22) e (23), su una produzione di 10.000 saranno $382 + 618 = 1000$ le mattonelle difettose.

Problema n. 2: soluzione. (testo del problema)

1. Assegnata la famiglia di funzioni cubiche

$$f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f_k(x) = -x^3 + kx + 9, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

l'equazione della retta r_k per il punto $A(0, f_k(0)) \equiv (0, 9)$ e tangente a f_k discende dalla

$$r_k: y - y_A = f'_k(0) \cdot (x - 0)$$

con $f'_k(x) = -3x^2 + k$. Poiché $f'_k(0) = k$ ne segue che

$$r_k: y - 9 = kx \implies y = kx + 9. \quad (2)$$

Allo stesso modo, la retta tangente per il punto di ascissa 1

$$B(1, f_k(1)) \equiv (1, -1 + k + 9) \equiv (1, k + 8), \quad \text{dove} \quad f'_k(1) = -3 + k,$$

risulta

$$s_k: y - (k + 8) = (-3 + k)(x - 1) \implies y = (-3 + k)x + 11. \quad (3)$$

Se M è il punto di intersezione tra questi fasci di rette, $\{M\} = r_k \cap s_k$, le sue coordinate discendono dal sistema

$$\begin{cases} y = kx + 9 \\ y = (-3 + k)x + 11 \end{cases} \implies kx + 9 = (-3 + k)x + 11$$

da cui

$$3x = 2 \quad \text{e quindi} \quad x_M = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad y_M = \frac{2}{3}k + 9 \implies M\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}k + 9\right)$$

e ciò conferma che i punti di intersezione dei fasci r_k e s_k possiedono ascissa pari a $2/3$, evidentemente indipendente dal parametro k .

2. Poiché $y_M = \frac{2}{3}k + 9$ e si vuole che sia $y_m < 10$, tale condizione si esplicita in

$$\frac{2}{3}k + 9 < 10 \implies \frac{2}{3}k < 1 \implies k < \frac{3}{2}$$

ed essendo $k \in \mathbb{Z}$, il valore intero più grande compatibile con la condizione posta è $k = 1$: la funzione $f_1(x)$ da studiare è pertanto la cubica

$$f_1(x) = y = -x^3 + x + 9. \quad (4)$$

Il polinomio $-x^3 + x + 9$ non appare scomponibile in termini di divisori di 9 ($\pm 1, \pm 3, \pm 9$) per cui lo studio del segno di $f_1(x)$ non è possibile in forme esatte ma verrà trattato successivamente in termini numerici. È comunque noto che una funzione cubica debba presentare almeno una soluzione reale.

• Lo studio dei limiti all'infinito fornisce

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[-x^3 \left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{9}{x^3} \right) \right] = \mp\infty$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{9}{x^3} \right) = 1 - 0 - 0 = 1 \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-x^3) = \mp\infty.$$

Sappiamo che una funzione cubica non possiede asintoti, caratteristica pure confermata dal valore del limite

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{-x^3}{x} \left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{9}{x^3} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[-x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{9}{x^3} \right) \right] = -\infty$$

dato che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-x^2) = -\infty$.

Sottolineata la continuità in $\mathbb{R}$ di $f_1(x)$ in quanto polinomio, il calcolo della derivata prima e lo studio del suo segno implicano

$$f'_1(x) = -3x^2 + 1, \quad f'_1(x) \geq 0 \implies x^2 \leq \frac{1}{3} \implies -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

per cui, riassunto tale segno in fig. 1, questo mostra come la funzione presenti un minimo relativo proprio in corrispondenza di $x_{min} = -1/\sqrt{3}$ ed un massimo relativo proprio in $x_{max} = 1/\sqrt{3}$.

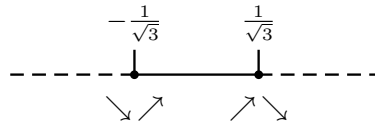


Fig. 1. Segno di $f'_1(x)$.

Le rispettive coordinate sono

$$\begin{aligned} R\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, f_1\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) &\equiv \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 9 - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right), \\ S\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, f_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) &\equiv \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 9 + \frac{2}{3\sqrt{3}}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

La derivata seconda $f''_1(x) = -6x$ è positiva o nulla se $-6x \geq 0$, disequazione risolta da $x \leq 0$: le concavità/concavità sono pertanto disposte come in fig. 2 mentre in $(0, 9)$ la funzione presenta un flesso.

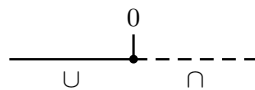
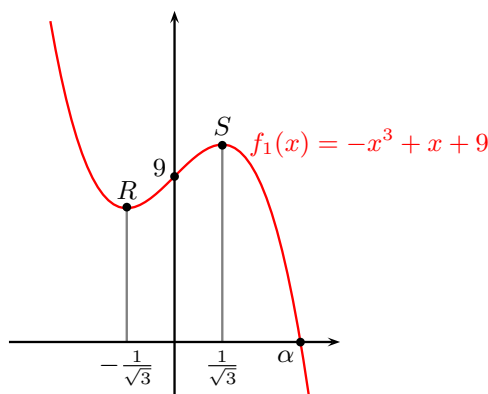


Fig. 2. Segno di $f''_1(x)$.

Fig. 3. Grafico $\Gamma_1(x)$ (non isometrico).

Poiché l'ordinata di R è

$$y_R = 9 - \frac{2}{3\sqrt{3}} > 0,$$

il grafico Γ_1 di $f_1(x)$ è rappresentato in figura 3 assieme alla prevista radice reale α di $-x^3 + x + 9 = 0$ che, evidentemente, dev'essere un valore maggiore di $1/\sqrt{3}$.

Per determinare numericamente il valore di α applichiamo il *metodo di Newton a partire dal valore $x_0 = 2$ in quanto

$$f_1(2) = -8 + 2 + 9 = 3 > 0 \quad \wedge \quad f_1(3) = -27 + 3 + 9 = -15 < 0$$

cosicché, per il teorema dei valori intermedi, dev'essere $2 < \alpha < 3$: iteriamo quindi l'espressione

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f_1(x_n)}{f_1'(x_n)} = x_n - \frac{(-x_n^3 + x_n + 9)}{(-3x_n^2 + 1)}$$

e, già alla terza iterazione otteniamo $\alpha \approx 2,2400$ (tabella 1). Se quindi $x \leq \alpha$ è $f_1(x) \geq 0$ coerentemente con quanto aspettato.

n	x_n	x_{n+1}	$x_{n+1} - x_n$
0	2	2,272727	0,272727
1	2,272727	2,240541	-0,032186
2	2,240541	2,240041	-0,000499

Tabella 1.

3. Evidenziato il triangolo formato dalla retta $r_1: y = x + 9$, tangente inflessionale al grafico Γ_1 e dalla retta $s_1: y = (-3 + 1)x + 11 = -2x + 11$, tangente a Γ_1 nel punto $B(1, 1 + 8) \equiv (1, 9)$ (fig. 4), queste incontrano l'asse x rispettivamente in

$$\begin{cases} y = x + 9 \\ y = 0 \end{cases} \implies x_1 = -9, \quad \begin{cases} y = -2x + 11 \\ y = 0 \end{cases} \implies x_2 = \frac{11}{2}$$

* Per i possessori di calcolatrice con capacità numeriche ma non simboliche ciò può eseguirsi automaticamente.

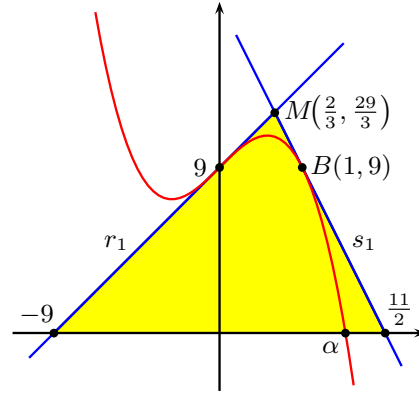


Fig. 4. Triangolo T (non isometrico).

mentre il punto $\{M\} = r_1 \cap s_1$ dedotto dallo studio *iniziale* ha coordinate $M(\frac{2}{3}, \frac{29}{3} + 9) \equiv (\frac{2}{3}, \frac{29}{3})$.

L'area di T è pertanto

$$\mathcal{A}(T) = \left[\frac{11}{2} - (-9) \right] \cdot y_M \cdot \frac{1}{2} = \frac{29}{4} \cdot \frac{29}{3} = \frac{841}{12}. \quad (6)$$

La regione dei punti P del triangolo che soddisfano alla condizione $y_P > f_1(x)$ è rappresentata invece nella figura 5 e, definiti i punti

$$A(0, 9), \quad C\left(\frac{11}{2}, 0\right),$$

la sua area si può determinare sottraendo all'area del quadrilatero di vertici $AOCM$ l'area $\mathcal{A}_1$ del trapezoide compreso tra Γ_1 e gli assi cartesiani cioè

$$\mathcal{A}_P = \mathcal{A}(AOCM) - \mathcal{A}_1. \quad (7)$$

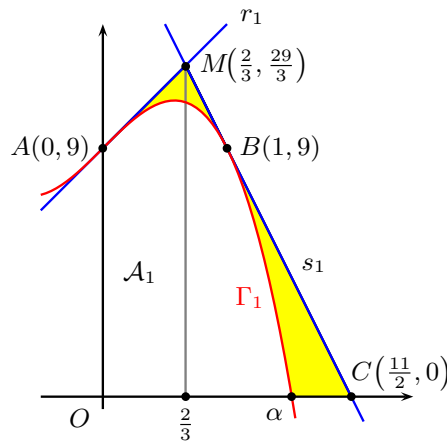


Fig. 5. Regione dei punti $y_P > f_1(x)$.

L'area di $AOCM$ si può ottenere come differenza tra l'area di T con quella del triangolo rettangolo avente cateti di lunghezza 9 interamente compreso nel II quadrante: risulta

$$\mathcal{A}(AOCM) = \mathcal{A}(T) - \frac{9 \cdot 9}{2} = \frac{841}{12} - \frac{81}{2} = \frac{355}{12}. \quad (8)$$

Il calcolo dell'area $\mathcal{A}_1$ è invece rappresentato dall'integrale definito

$$\mathcal{A}_1 = \int_0^\alpha f_1(x) dx = \int_0^\alpha (-x^3 + x + 9) dx$$

che si risolve in

$$\mathcal{A}_1 = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 9x \right]_0^\alpha = -\frac{\alpha^4}{4} + \frac{\alpha^2}{2} + 9\alpha \approx 16,3747$$

e quindi per (7) e (8) abbiamo

$$\mathcal{A}_P = \mathcal{A}(AOCM) - \mathcal{A}_1 = \frac{355}{12} - 16,3747 \approx 13,2086.$$

La probabilità p che un punto P qualsiasi del triangolo T abbia ordinata maggiore di $f_1(x)$ è espressa dal rapporto delle aree $\mathcal{A}_P$ e $\mathcal{A}(T)$ e vale per la (6)

$$p[y_P > f_1(x)] = \frac{\mathcal{A}_P}{\mathcal{A}(T)} \approx \frac{13,2086}{(841/12)} \approx 0,1885 \approx 19\%$$

4. Determiniamo l'equazione N della retta normale a

$$f_1(x) = -x^3 + x + 9 \quad \text{sapendo che} \quad f_1'(x) = -3x^2 + 1 \quad (9)$$

in un suo punto generico di ascissa x_0 (fig. 6).

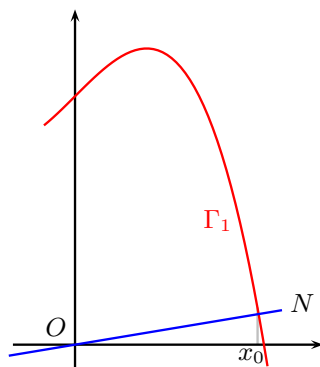


Fig. 6. Grafico Γ_1 e retta normale per O .

Questa si ottiene dall'equazione del fascio di rette per $(x_0, f_1(x_0))$

$$y - f_1(x_0) = m(x - x_0),$$

sostituendo al coefficiente angolare generico m quello della normale ossia $-1/f'_1(x_0)$ e quindi

$$N: y - f_1(x_0) = -\frac{1}{f'_1(x_0)} \cdot (x - x_0). \quad (10)$$

Poiché si chiede che tale retta passi per l'origine, la coppia di valori $x = y = 0$ dev'essere una sua soluzione per cui la precedente equazione si riduce alla

$$-f_1(x_0) = \frac{x_0}{f'_1(x_0)}$$

o anche

$$x_0 = -f_1(x_0) \cdot f'_1(x_0). \quad (11)$$

Sostituendo le (9) si ottiene esplicitamente

$$x_0 = -(-x_0^3 + x_0 + 9) \cdot (-3x_0^2 + 1)$$

che svolta si riduce ad un'equazione polinomiale di grado $5 = 2 \cdot 3 - 1$ nell'incognita x_0 .

Quest'ultima osservazione si può generalizzare: se $f(x)$ rappresenta un polinomio di grado $n > 0$, allora $f'(x)$ sarà pure un polinomio ma di grado $(n - 1)$ e la (11) sarà a sua volta un polinomio di grado $n + (n - 1) = 2n - 1$.

Ora, per il teorema fondamentale dell'algebra, un polinomio di grado $(2n - 1)$ non potrà possedere più di $(2n - 1)$ soluzioni cosicché il grafico associato ad un qualsiasi polinomio di grado $n > 0$ non potrà presentare più di $(2n - 1)$ rette normali passanti per l'origine.

Quesito n. 1: soluzione. (testo del quesito)

Siano $\overline{HB} = r$ e $\overline{HV} = h$ rispettivamente il raggio di base e l'altezza del cono mentre $x = \overline{HS'}$ rappresenta il raggio di base del cilindro (fig. 1): evidentemente x è limitato all'intervallo $x \in [0, r]$.

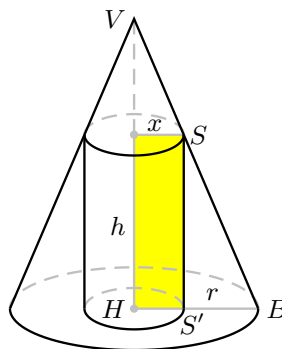


Fig. 1. Cono circolare retto e cilindro inscritto.

Dalla similitudine dei triangoli $\triangle SS'B$ e $\triangle VHB$ e la conseguente proporzione tra i lati otteniamo l'altezza del cilindro $\overline{SS'}$

$$\frac{\overline{VH}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{SS'}}{\overline{S'B}} \implies \frac{h}{r} = \frac{\overline{SS'}}{r-x} \implies \overline{SS'} = \frac{h}{r}(r-x). \quad (1)$$

Il volume di questo è quindi

$$V(x) = \pi x^2 \cdot \left[\frac{h}{r}(r-x) \right] = \frac{\pi h}{r} \cdot x^2(r-x)$$

mentre quello del cono è $V_c = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Si deve dimostrare che

$$\begin{cases} V(x) < \frac{V_c}{2} \\ 0 \leq x \leq r \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \frac{\pi h}{r} \cdot x^2(r-x) < \frac{1}{6}\pi r^2 h$$

ossia, eliminati i fattori comuni, che valga

$$x^2(r-x) < \frac{1}{6}r^3 \quad \text{con} \quad 0 \leq x \leq r. \quad (2)$$

A questo scopo studiamo l'andamento del polinomio cubico a primo membro cioè poniamo $y = x^2(r-x) = rx^2 - x^3$ e, di questa espressione, calcoliamo la derivata prima $y' = 2rx - 3x^2$. Il segno di quest'ultima risulta

$$y' \geq 0 \implies x(2r-3x) \geq 0 \implies 0 \leq x \leq \frac{2}{3}r$$

per cui, anche in base alla rappresentazione grafica di fig. 2 che sintetizza il suo segno assieme alla crescita/decrecenza della funzione cubica, osserviamo come quest'ultima raggiunga un massimo relativo in $x_m = \frac{2}{3}r$.

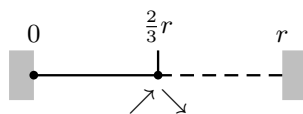


Fig. 2. Segno della $y' = 2rx - 3x^2$.

Il valore della funzione in x_m risulta

$$y\left(\frac{2}{3}r\right) = \frac{4}{9}r^2\left(r - \frac{2}{3}r\right) = \frac{4}{27}r^3$$

ed essendo $y(0) = 0$ e $y(r) = 0$, tale massimo è pure assoluto. Poiché

$$\frac{4}{27}r^3 < \frac{1}{6}r^3 \quad \text{così come} \quad 24 < 27$$

possiamo infine affermare la validità della (2).

Quesito n. 2: soluzione. (testo del quesito)

Indicate con p_1, p_2, p_3, p_4 le probabilità che escano i numeri 1, 2, 3, 4, la relazione che le lega è

$$p_1 = 2p_2, \quad p_2 = 2p_3, \quad p_3 = 2p_4 \quad (1)$$

cosicché se poniamo $p_4 = p$ risulta

$$p_3 = 2p, \quad p_2 = 2p_3 = 2(2p) = 4p, \quad p_1 = 2p_2 = 2(4p) = 8p. \quad (2)$$

Poiché l'uscita di un numero tra 1 e 4 è un evento certo (un dado a forma di tetraedro possiede 4 facce), è pure

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \implies (8p) + (4p) + (2p) + p = 1$$

e quindi

$$15p = 1 \implies p = \frac{1}{15} = p_4$$

e di conseguenza

$$p_3 = \frac{2}{15}, \quad p_2 = \frac{4}{15}, \quad p_1 = \frac{8}{15}.$$

Se definiamo come E_1 l'evento

$$E_1 = \{\text{esce il numero 1}\},$$

la probabilità dell'evento $E_1 \cap E_1$ ossia che i due dadi lanciati contemporaneamente mostrino entrambi il numero 1, si determina utilizzando il teorema della probabilità composta nel caso di eventi indipendenti ossia

$$p(E_1 \cap E_1) = p(E_1) \cdot p(E_1) = p_1 \cdot p_1 = \frac{8}{15} \cdot \frac{8}{15} = \left(\frac{8}{15}\right)^2. \quad (3)$$

In modo analogo si determinano le probabilità per l'uscita delle altre coppie di numeri

$$p(E_2 \cap E_2) = \left(\frac{4}{15}\right)^2, \quad p(E_3 \cap E_3) = \left(\frac{2}{15}\right)^2, \quad p(E_4 \cap E_4) = \left(\frac{1}{15}\right)^2. \quad (4)$$

Poiché si chiede la probabilità che escano due numeri uguali, tale evento lo si può definire formalmente come

$$(E_1 \cap E_1) \cup (E_2 \cap E_2) \cup (E_3 \cap E_3) \cup (E_4 \cap E_4)$$

dove ciascun evento di tale unione è incompatibile con i rimanenti. La probabilità cercata

$$p[(E_1 \cap E_1) \cup (E_2 \cap E_2) \cup (E_3 \cap E_3) \cup (E_4 \cap E_4)]$$

per il teorema delle probabilità totali si può allora scrivere come

$$\begin{aligned} p[(E_1 \cap E_1) \cup (E_2 \cap E_2) \cup (E_3 \cap E_3) \cup (E_4 \cap E_4)] \\ &= p(E_1 \cap E_1) + p(E_2 \cap E_2) + p(E_3 \cap E_3) + p(E_4 \cap E_4) \\ &= \left(\frac{8}{15}\right)^2 + \left(\frac{4}{15}\right)^2 + \left(\frac{2}{15}\right)^2 + \left(\frac{1}{15}\right)^2 \\ &= \frac{1}{15^2}(64 + 16 + 4 + 1) = \frac{85}{225} = \frac{17}{45}, \end{aligned}$$

dove si sono richiamati i risultati ottenuti in (3) e (4).

Quesito n. 3: soluzione. (testo del quesito)

Le condizioni di tangenza di due funzioni qualsiasi $y = f(x)$ e $y = g(x)$ sono riassunte nel sistema

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \quad (1)$$

la prima condizione assicura che i grafici corrispondenti si incontrino nei punti di ascissa x mentre la seconda aggiunge la restrizione che, in tali punti, i due grafici abbiano la medesima retta tangente. Nel caso in esame le funzioni sono

$$f(x) = -4x + k, \quad g(x) = x^3 - 4x^2 + 5$$

e con le rispettive derivate

$$f'(x) = -4, \quad g'(x) = 3x^2 - 8x,$$

il sistema (1) si riporta alle equazioni

$$\begin{cases} -4x + k = x^3 - 4x^2 + 5 \\ -4 = 3x^2 - 8x \end{cases} \quad (2)$$

Le soluzioni della seconda sono

$$3x^2 - 8x + 4 = 0 \implies x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{3} = \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow \frac{2}{3} \end{matrix}$$

per cui, sostituiti tali valori nella prima delle (2) troviamo i valori di k richiesti

$$\begin{aligned} -8 + k &= 8 - 16 + 5 \implies k = 5 \\ -\frac{8}{3} + k &= \frac{8}{27} - \frac{16}{9} + 5 \implies k = \frac{8}{27} - \frac{48}{27} + \frac{8}{3} + 5 = \frac{167}{27}. \end{aligned}$$

Quesito n. 4: soluzione. (testo del quesito)

Assegnata la funzione

$$f(x) = \frac{3x - e^{\sin x}}{5 + e^{-x} - \cos x}, \quad (1)$$

procediamo al calcolo dei limiti

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x - e^{\sin x}}{5 + e^{-x} - \cos x} \quad (2)$$

con il dividere il numeratore e il denominatore della funzione ad argomento per x

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(3x - e^{\sin x})/x}{(5 + e^{-x} - \cos x)/x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\left(3 - \frac{e^{\sin x}}{x}\right)}{\left(\frac{5 - \cos x}{x} + \frac{e^{-x}}{x}\right)}. \quad (3)$$

Calcoliamo quindi il limite di ciascuno dei termini che compongono questa riscrittura. Per il limite

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{e^{\operatorname{sen} x}}{x} \right) \quad (4)$$

osserviamo che valgono le disuguaglianze

$$\frac{e^{-1}}{x} \leq \frac{e^{\operatorname{sen} x}}{x} \leq \frac{e}{x}$$

in quanto la funzione esponenziale è monotona crescente e $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$. Poiché

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{e^{-1}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{e}{x} \right) = 0$$

possiamo applicare il teorema del confronto per cui (4) vale

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{e^{\operatorname{sen} x}}{x} \right) = 0. \quad (5)$$

Di conseguenza, il numeratore della funzione ad argomento di (3) si risolve in

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(3 - \frac{e^{\operatorname{sen} x}}{x} \right) = 3 - 0 = 3. \quad (6)$$

Con il medesimo teorema possiamo risolvere il limite del termine

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{5 - \cos x}{x} \right)$$

in quanto la funzione ad argomento soddisfa pure alle disuguaglianze

$$\frac{5-1}{x} \leq \frac{5-\cos x}{x} \leq \frac{5+1}{x} \quad \implies \quad \frac{4}{x} \leq \frac{5-\cos x}{x} \leq \frac{6}{x}$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{4}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{6}{x} \right) = 0$$

e pertanto

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{5 - \cos x}{x} \right) = 0. \quad (7)$$

Rimane da trattare il limite di e^{-x}/x per il quale converrà avviare uno studio separato per $x \rightarrow -\infty$ o $x \rightarrow +\infty$ in quanto l'esponenziale presenta un comportamento del tutto diverso nelle due situazioni. Se $x \rightarrow -\infty$ il limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x} \right)$$

è indeterminato, mentre esiste il limite del rapporto delle derivate del numeratore e denominatore della funzione ad argomento in quanto

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{D(e^{-x})}{D(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-e^{-x})}{1} = -\infty :$$

possiamo quindi applicare il teorema di De L'Hôpital e dedurre che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x} \right) = -\infty.$$

Ne segue che il limite del denominatore di (3) è, a sua volta

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5 - \cos x}{x} + \frac{e^{-x}}{x} \right) = -\infty \quad (8)$$

e quindi, per quest'ultimo risultato e per il limite (6), il limite iniziale

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(3 - \frac{e^{\sin x}}{x} \right)}{\left(\frac{5 - \cos x}{x} + \frac{e^{-x}}{x} \right)}$$

risulta

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - e^{\sin x}}{5 + e^{-x} - \cos x} = 0.$$

Se invece $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x} \right) = 0^+ \quad \text{in quanto} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5 - \cos x}{x} + \frac{e^{-x}}{x} \right) = 0 + 0 = 0^+$$

e il limite iniziale è, assieme a (6),

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(3 - \frac{e^{\sin x}}{x} \right)}{\left(\frac{5 - \cos x}{x} + \frac{e^{-x}}{x} \right)} = +\infty.$$

Quesito n. 5: soluzione. (testo del quesito)

Se r è il raggio della parte a forma di semicirconferenza della staccionata e h l'altezza di un lato della parte rettangolare (fig. 1), il perimetro di lunghezza complessiva pari a $l = 2$ m si esprime con questi parametri come

$$l = \pi r + 2r + 2h \quad (1)$$

in quanto somma di una semicirconferenza e di tre lati del rettangolo (fig. 1).

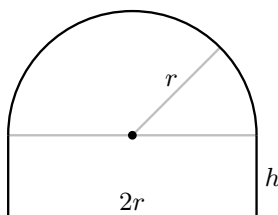


Fig. 1. Perimetro della staccionata e suoi parametri.

L'area totale $\mathcal{A}$ è data dalla somma di un semicerchio di raggio r e di un rettangolo di lati h e $2r$ per cui

$$\mathcal{A} = \frac{\pi r^2}{2} + 2r \cdot h. \quad (2)$$

Nell'ipotesi che la staccionata si riduca al solo semicerchio i valori limite di h e r che discendono dalla (1) sono

$$h_{min} = 0 \quad \wedge \quad l = (\pi + 2) \cdot r_{max}$$

da cui

$$h_{min} = 0 \quad \wedge \quad r_{max} = \frac{l}{\pi + 2}. \quad (3)$$

Nel caso invece che sia il semicerchio ad avere raggio nullo, allora

$$h_{max} = \frac{l}{2} \quad \wedge \quad r_{min} = 0.$$

Pertanto le limitazioni sono

$$0 \leq h \leq \frac{l}{2}, \quad 0 \leq r \leq \frac{l}{\pi + 2}.$$

Poiché si chiedono le dimensioni che garantiscono l'area massima, dalla (1), esplicitiamo la variabile h

$$2h = l - \pi r - 2r \implies h = \frac{l}{2} - \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)r \quad (4)$$

e quindi riportiamo l'espressione dell'area ad una sola variabile

$$\mathcal{A} = \frac{\pi}{2} r^2 + r(2h) = \frac{\pi}{2} r^2 + r(l - \pi r - 2r) = r^2 \left(-\frac{\pi}{2} - 2\right) + lr.$$

Dovremo quindi individuare il massimo della funzione $\mathcal{A}(r)$ con le limitazioni

$$\begin{cases} \mathcal{A}(r) = r^2 \left(-\frac{\pi}{2} - 2\right) + lr \\ 0 \leq r \leq \frac{l}{\pi + 2}. \end{cases}$$

Per determinare il massimo di $\mathcal{A}$, calcoliamo la sua derivata prima e ne studiamo il segno

$$\mathcal{A}'(r) = 2r \left(-\frac{\pi}{2} - 2\right) + l \geq 0$$

e quindi

$$r(-\pi - 4) \geq -l \implies r \leq \frac{l}{\pi + 4}$$

per cui, rappresentato tale segno in fig. 2

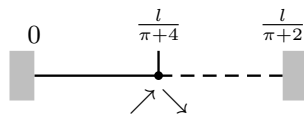


Fig. 2. Segno della derivata prima $\mathcal{A}'(r)$.

possiamo riconoscere che il punto di massimo corrisponde al valore

$$r_{max} = \frac{l}{\pi + 4}.$$

In corrispondenza, la misura del diametro della parte semicircolare è

$$2r_{max} = \frac{2l}{\pi + 4} \approx 0,56$$

mentre, sulla base di (4) l'altezza della zona rettangolare dev'essere pari a

$$\begin{aligned} h_{max} &= \frac{l}{2} - \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)r_{max} = \frac{l}{2} - \frac{\pi + 2}{2} \cdot \frac{l}{\pi + 4} \\ &= l \cdot \frac{\pi + 4 - \pi - 2}{2(\pi + 4)} = \frac{l}{\pi + 4} \approx 0,28. \end{aligned}$$

Quesito n. 6: soluzione. (testo del quesito)

Gli elementi forniti dal quesito consistono nella retta r espressa in forma parametrica

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (1)$$

alla quale deve appartenere il centro della superficie sferica e tangente al piano

$$\pi: 3x - y - 2z + 14 = 0, \quad \text{nel punto di coordinate } T(-4, 0, 1). \quad (2)$$

Il piano π è caratterizzato dal vettore normale $\vec{n}$ con componenti

$$\vec{n}(3, -1, -2)$$

e, incidentalmente, $\vec{n}$ è perpendicolare al vettore $\vec{r}(1, 1, 1)$ che invece caratterizza la direzione di r (fig. 1).

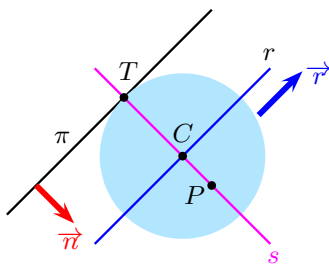


Fig. 1. Sezione del piano π , della sfera e rette r e s .

Difatti è nullo il prodotto scalare

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = 1(3) + 1(-1) + 1(-2) = 0$$

e ciò facilita una rappresentazione grafica della situazione geometrica: il piano π appare quindi nella figura 1 in sezione come una retta.

La retta s passante per T e perpendicolare al piano π deve contenere il centro C della sfera per cui, se $P(x, y, z)$ è un punto generico di tale retta, la sua equazione discende dalla condizione

$$s: \overrightarrow{PT} = k \vec{n}$$

con k parametro reale qualsiasi. Questa si esplicita in

$$s: \begin{cases} x - (-4) = k(3) \\ y - (0) = k(-1) \\ z - (1) = k(-2) \end{cases} \quad \text{da cui} \quad s: \begin{cases} x = -4 + 3k \\ y = -k \\ z = 1 - 2k. \end{cases} \quad (3)$$

Il centro $\{C\} = r \cap s$ appartiene ad entrambe le rette r e s e soddisfa quindi al sistema

$$\begin{cases} t = -4 + 3k \\ t = -k \\ t = 1 - 2k \end{cases} \implies \begin{cases} -k = -4 + 3k \\ t = -k \\ -k = 1 - 2k \end{cases} \implies \begin{cases} k = 1 \\ t = -1. \end{cases}$$

La sostituzione di questi valori nella (1) o nella (3) permette di trovare le coordinate del centro C ossia $C(-1, -1, -1)$. Il raggio R della sfera è invece pari alla distanza tra C e T e risulta

$$R^2 = \overline{CT}^2 = [-1 - (-4)]^2 + (-1 - 0)^2 + (-1 - 1)^2 = 9 + 1 + 4 = 14$$

per cui l'equazione della superficie sferica richiesta è, in definitiva,

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 14 \implies x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z - 11 = 0.$$

Quesito n. 7: soluzione. (testo del quesito)

Per determinare i valori del parametro a che compare negli estremi di integrazione dell'integrale definito

$$\int_a^{a+1} (3x^2 + 3) dx = 10 \quad (1)$$

va eseguita l'integrazione indefinita della funzione ad argomento ossia

$$\int (3x^2 + 3) dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 3x + c = x^3 + 3x + c.$$

La relazione (1) assume quindi la forma

$$[x^3 + 3x]_a^{a+1} = 10$$

che equivale a

$$(a+1)^3 + 3(a+1) - a^3 - 3a = 10.$$

Lo sviluppo del cubo del binomio comporta

$$a^3 + 3a^2 + 3a + 1 + 3a + 3 - a^3 - 3a - 10 = 0$$

da cui l'equazione

$$3a^2 + 3a - 6 = 0 \implies a^2 + a - 2 = 0.$$

Questa possiede le soluzioni

$$a_{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow -2 \end{matrix}$$

entrambe accettabili in quanto il parametro a non ha alcuna limitazione.

Quesito n. 8: soluzione. (testo del quesito)

Perché uno dei due giocatori vinca deve raggiungere 10 “successi” su un numero massimo di “tentativi” pari a 12. Pertanto, ripresa la distribuzione binomiale che definisce la probabilità $P(n, k)$ di k successi su n prove

$$P(n, k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

e nota la probabilità $p = 1/2$ su una singola prova in quanto i due giocatori hanno la stessa probabilità di vincere, un giocatore potrà ottenere

a) {10 successi su 10 prove} con la probabilità

$$P(10, 10) = \binom{10}{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{2^{10}} \quad (1)$$

b) {9 successi su 10 prove} $\wedge$ {1 successo alla 11^a}. Poiché i due eventi sono indipendenti, la probabilità di tale evento è il prodotto delle probabilità dei singoli eventi per cui abbiamo

$$P(10, 9) \cdot \frac{1}{2} = \left[\binom{10}{9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \frac{1}{2} \right] \cdot \frac{1}{2} = 10 \cdot \frac{1}{2^{11}} \quad (2)$$

c) {9 successi su 11 prove} $\wedge$ {1 successo alla 12^a}. Analogamente al caso precedente la probabilità cercata è

$$P(11, 9) \cdot \frac{1}{2} = \left[\binom{11}{9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] \cdot \frac{1}{2} = 55 \cdot \frac{1}{2^{12}} \quad (3)$$

Poiché i casi a), b) e c) sono incompatibili, la probabilità P che vinca un giocatore con le modalità richieste è, per il teorema delle probabilità totali, la somma delle probabilità ottenute in (1), (2) e (3)

$$\begin{aligned} P &= P(10, 10) + P(10, 9) \cdot \frac{1}{2} + P(11, 9) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2^{10}} + \frac{10}{2^{11}} + \frac{55}{2^{12}} \\ &= \frac{4}{2^{12}} + \frac{20}{2^{12}} + \frac{55}{2^{12}} = \frac{79}{2^{12}}. \end{aligned}$$

Poiché due sono i giocatori e si chiede che *l'uno o l'altro* vinca in un numero di partite minore o uguale a 12, la probabilità che uno dei due vinca è quindi

$$P(\text{entrambi}) = P + P = 2 \cdot \frac{79}{2^{12}} = \frac{79}{2^{11}} \approx 0,0386.$$

Quesito n. 9: soluzione. (testo del quesito)

Assegnati i punti

$$A(3, 1, 0), \quad B(3, -1, 2), \quad C(1, 1, 2) \quad (1)$$

la verifica che siano i vertici di un triangolo equilatero comporta, tra le varie altre condizioni, l'uguaglianza delle distanze dei lati $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$. Difatti

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{(3-3)^2 + (1+1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ \overline{BC} &= \sqrt{(3-1)^2 + (-1-1)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ \overline{CA} &= \sqrt{(1-3)^2 + (1-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Gli stessi punti appartengono anche al piano

$$\pi : x + y + z - 4 = 0 \quad (2)$$

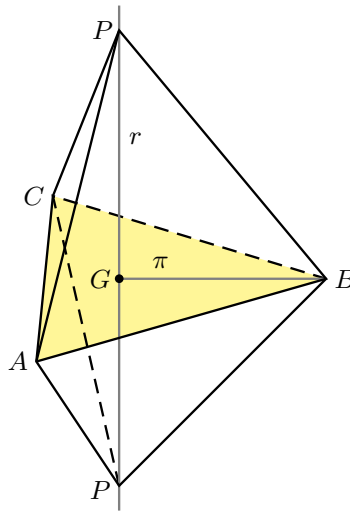
in quanto soddisfano la sua equazione

$$\begin{aligned} A \in \pi &\implies 3 + 1 + 0 - 4 = 0 \implies 0 = 0 \\ B \in \pi &\implies 3 - 1 + 2 - 4 = 0 \implies 0 = 0 \\ C \in \pi &\implies 1 + 1 + 2 - 4 = 0 \implies 0 = 0. \end{aligned}$$

Per determinare i possibili punti P in modo che $ABCP$ sia un tetraedro regolare osserviamo come questi vertici debbano appartenere alla retta r passante per il baricentro G di $\triangle ABC$ e perpendicolare al piano π (fig. 1).

Poiché le coordinate di G sono

$$G \left[\frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C), \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C), \frac{1}{3}(z_A + z_B + z_C) \right] \equiv \left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right)$$

**Fig. 1.** Tetraedro e piano π .

e il piano π è caratterizzato dal vettore normale $\vec{n}(1, 1, 1)$, la retta r possiede la rappresentazione parametrica

$$r : \begin{cases} x = \frac{7}{3} + 1 \cdot t = \frac{7}{3} + t \\ y = \frac{1}{3} + 1 \cdot t = \frac{1}{3} + t \\ z = \frac{4}{3} + 1 \cdot t = \frac{4}{3} + t \end{cases} \quad (3)$$

che discende dalla più sintetica relazione vettoriale $\overrightarrow{PG} = t \cdot \vec{n}$. Imponendo che il punto $P(x, y, z)$ di r abbia distanza da uno dei vertici di $\triangle ABC$, per esempio da A , pari alla lunghezza dello spigolo del tetraedro $\overline{AP}^2 = \overline{AB}^2 = (2\sqrt{2})^2$ otteniamo

$$\overline{AP}^2 = 8 \implies (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z - 0)^2 = 8 \quad (4)$$

per cui sostituendo le equazioni parametriche (3) di r abbiamo

$$\left(\frac{7}{3} + t - 3\right)^2 + \left(\frac{1}{3} + t - 1\right)^2 + \left(\frac{4}{3} + t\right)^2 = 8.$$

Sviluppando i quadrati di

$$\left(-\frac{2}{3} + t\right)^2 + \left(-\frac{2}{3} + t\right)^2 + \left(\frac{4}{3} + t\right)^2 = 8$$

giungiamo alla

$$2t^2 + \frac{8}{9} - \frac{8}{3}t + \frac{16}{9} + t^2 + \frac{8}{3}t - 8 = 0 \implies 3t^2 - \frac{48}{9} = 0$$

da cui le due soluzioni $t = \pm 4/3$. Di conseguenza, la sostituzione di tali valori nelle equazioni (3) fornisce i due punti

$$P_1\left(\frac{11}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right), \quad P_2(1, -1, 0).$$

Quesito n. 10: soluzione. (testo del quesito)

Perché una funzione data sia soluzione di una equazione differenziale quest'ultima si deve ridurre ad una identità una volta che si sostituisca la funzione e le sue derivate nella equazione differenziale. Pertanto, assegnata la funzione parametrica

$$y(x) = 2e^{kx+2} \quad (1)$$

e l'equazione differenziale coinvolgente la funzione e le sue prime due derivate

$$y'' - 2y' - 3y = 0, \quad (2)$$

calcoliamo la derivata prima e seconda di $y(x)$. Queste sono

$$\begin{aligned} y'(x) &= 2e^{kx+2} \cdot (k) = 2ke^{kx+2} \\ y''(x) &= 2ke^{kx+2} \cdot (k) = 2k^2e^{kx+2}. \end{aligned}$$

Inserita la (1) e queste due ultime espressioni nella (2) otteniamo

$$2k^2e^{kx+2} - 2(2ke^{kx+2}) - 3(2e^{kx+2}) = 0$$

da cui

$$e^{kx+2}(2k^2 - 4k - 6) = 0. \quad (3)$$

Poiché questa deve ridursi ad una identità per ogni x e ricordata la positività dell'esponente, dev'essere

$$2k^2 - 4k - 6 = 0 \quad \implies \quad k^2 - 2k - 3 = 0,$$

equazione che ammette le soluzioni

$$k_{12} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2 = \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow -1 \end{matrix}$$

entrambe accettabili data l'assenza di limitazioni sul parametro reale k .

APPENDICE

Nelle pagine seguenti proponiamo, senza soluzioni, il testo delle prove assegnate nella sessione suppletiva dei corsi di liceo scientifico di ordinamento e opzione scienze applicate.

Indice delle prove suppletive

Esame 2015 suppletiva	120
Esame 2016 suppletiva	123
Esame 2017 suppletiva	126
Esame 2018 suppletiva	129

Esame 2015 suppletiva

Problemi

1) Sei stato incaricato di progettare una pista da ballo all'esterno di un locale in costruzione in una zona balneare. Il progetto prevede, oltre alla pista, delle zone verdi e una tettoia che consenta l'uso della pista anche in caso di pioggia.

La pista da ballo viene rappresentata, in un sistema di riferimento cartesiano Oxy in cui l'unità di misura corrisponde a 1 metro, all'interno del rettangolo avente come vertici i punti di coordinate $(-4, 0)$, $(4, 0)$, $(-4, 25)$ e $(4, 25)$; nella scelta della sagoma della pista va rispettato il vincolo urbanistico che stabilisce che essa non può occupare più del 60% della superficie di tale rettangolo.

Un tuo collaboratore predispone due soluzioni: la prima è rappresentata dalla parte di piano compresa tra l'asse x e la curva di equazione, $y = -\frac{25}{16}x^2 + 25$, $x \in [-4, 4]$, la seconda dalla parte di piano compresa tra l'asse x , la curva di equazione $y = \frac{100}{4 + x^2}$ e le rette $x = -2\sqrt{3}$, $x = 2\sqrt{3}$.

1. Studia le due soluzioni, e traccia il grafico di entrambe nel riferimento cartesiano Oxy . Individua in particolare le caratteristiche delle due funzioni che sono più rilevanti nella fase di costruzione della pista: eventuali punti di massimo e di minimo, di flesso, angolosi.

Il proprietario del locale sceglie la seconda soluzione, che ritiene più elegante, ma ti chiede di realizzare due aiuole nelle porzioni di terreno comprese tra le due curve che gli hai proposto.

2. Determina l'area della soluzione scelta e verifica che essa rispetti i vincoli urbanistici, in modo da poter poi procedere all'acquisto del materiale necessario per la costruzione della pista.

Poiché lo scavo effettuato ai lati della pista ha reso il terreno scosceso, hai fatto eseguire delle misure e hai verificato che sia per $x \in [-2\sqrt{3}, 0]$ che per $x \in [0, 2\sqrt{3}]$ la profondità dello scavo stesso varia con la legge lineare rappresentata dalla funzione $f(x) = |x| + 1$; è dunque necessario acquistare del terreno per riempire lo scavo e realizzare le aiuole richieste.

3. Calcola quanti metri cubi di terreno vegetale sono necessari per riempire l'aiuola delimitata dalle suddette curve nell'intervallo $[-2\sqrt{3}, 0]$.

Per realizzare la tettoia, è necessario usare un piano leggermente inclinato, per favorire il deflusso della pioggia. Nel sistema di riferimento cartesiano $Oxyz$, tale piano deve passare per i punti $(-4, 0, 5)$, $(4, 0, 5)$ e $(0, 25, 4)$, in modo che la quota vari gradualmente dai 5 metri in corrispondenza della pista, ai 4 metri in corrispondenza della fine della pista stessa.

4. Determina l'equazione del piano prescelto.

2) La rotazione intorno all'asse x dei grafici della famiglia di funzioni:

$$f_k(x) = \frac{x}{4k} \sqrt{k^2 - x} \quad \text{con } x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq x \leq k^2, \quad k \in \mathbb{R}, \quad k > 0$$

genera dei solidi di rotazione di forma aerodinamica.

1. In un riferimento cartesiano Oxy , traccia i grafici delle funzioni $f_k(x)$, per $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$ e determina il valore di k per il quale il volume del solido di rotazione assume il valore $\frac{64\pi}{192}$;
2. calcola il diametro massimo dei solidi di rotazione in funzione di k , e determina il valore dell'angolo formato dalla tangente al grafico di f_k con l'asse x per $x = 0$;
3. assumendo che la distribuzione della massa sia omogenea, il baricentro del corpo di rotazione si trova sull'asse x , per ragioni di simmetria. Determina l'ascissa x_s del baricentro in funzione del parametro k , sapendo che vale:

$$x_s = \frac{\pi \int_a^b x [f_k(x)]^2 dx}{V}$$

dove gli estremi di integrazione a e b vanno scelti opportunamente, e V indica il volume del solido di rotazione;

4. all'interno del solido di rotazione generato da f_k , per $k = 3$, si vorrebbe collocare un cilindro di raggio 0,5 e di altezza 6. Verifica se ciò è possibile, motivando la tua risposta.

Questionario

- 1) Data la funzione integrale $\int_1^x \ln(t) dt$, determinare per quali valori di x il suo grafico incontra la retta di equazione $y = 2x + 1$.
- 2) Data la famiglia di funzioni $y = -x^3 + 6kx + 33$ trovare la funzione tangente nel punto di ascissa 3 ad una retta parallela alla bisettrice del primo quadrante. Determinare l'equazione di detta tangente.
- 3) Vengono lanciati due dadi. Dei due punteggi, viene considerato il maggiore; se sono uguali, viene considerato il punteggio comune dei due dadi. Detto X il punteggio registrato, riportare in una tabella la distribuzione di probabilità di X e mostrare che $p(X = 3) = \frac{5}{36}$. Calcolare inoltre la media e la varianza di X .
- 4) In un sistema di riferimento cartesiano nello spazio $Oxyz$ sono dati i punti $A(-3, 4, 0)$ e $C(-2, 1, 2)$. I tre punti O , A e C giacciono su un piano E . Determinare l'equazione che descrive il piano E .
- 5) Determinare il volume del solido generato dalla rotazione attorno alla retta di equazione $x = 2$ della parte di piano delimitata dalla parabola di equazione $y^2 = 8x$ e dalla retta stessa.
- 6) Preso un punto C su una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, sia M il punto medio dell'arco BC . Determinare il valore massimo che può assumere l'area del quadrilatero $ABMC$.
- 7) Una fabbrica produce mediamente il 3% di prodotti difettosi. Determinare la probabilità che in un campione di 100 prodotti ve ne siano 2 difettosi, usando:

- la distribuzione binomiale;
 - la distribuzione di Poisson.
- 8) Provare che la funzione $y = e^x - \operatorname{tg} x$ ha infiniti zeri, mentre la funzione $y = e^x - \operatorname{arctg} x$ non ne ha alcuno.
- 9) Calcolare la derivata della funzione $f(x) = x \cdot e^x$, adoperando la definizione di derivata.
- 10) Sia la derivata seconda di una funzione reale $f(x)$ data da $f''(x) = 3x - 6$. Determinare l'espressione di $f(x)$, sapendo che il grafico della funzione passa per il punto $P(2, -7)$ e che l'angolo formato dalla tangente al grafico di $f(x)$ con l'asse y nel punto di ascissa $x = 0$ vale 45° .

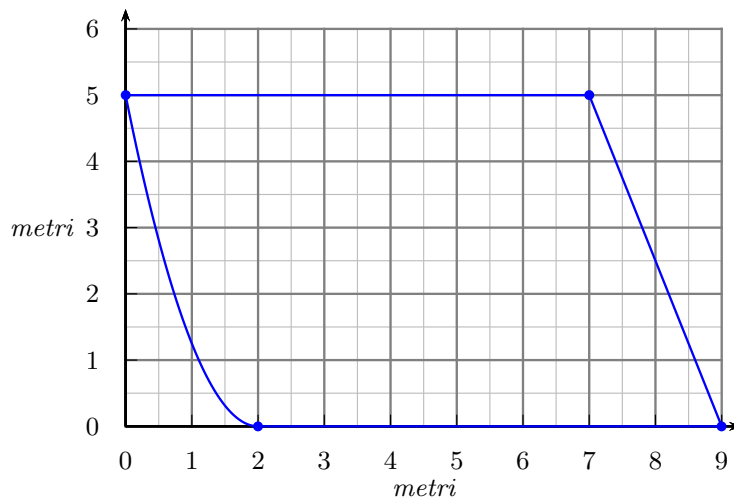
[Prove suppletive:](#) [indice](#)

Esame 2016 suppletiva

Problemi

1) Sei l'amministratore di un condominio che ha deliberato di dotarsi di una sala per le riunioni condominiali, sfruttando uno spazio comune già disponibile, da coprire e attrezzare.

La superficie individuata è rappresentata in figura 1:



La superficie viene chiusa con pareti laterali alte 3,60 metri e con tetto piano orizzontale. Uno dei condomini ti fa presente la necessità di prevedere un impianto di aerazione nella sala, in quanto la mancanza di un adeguato ricambio d'aria in locali chiusi può provocare una serie di disturbi fisici, a causa dell'accumulo di CO_2 (anidride carbonica o diossido di carbonio). Di norma si considera come valore limite della concentrazione di CO_2 lo 0,15%: su 1 milione di particelle d'aria il massimo numero di molecole di CO_2 deve essere dunque 1500. Nella scelta dell'impianto di aerazione un parametro fondamentale è la potenza in kilowatt, che dipende dal volume dell'ambiente in cui esso viene utilizzato.

La seguente scheda tecnica, fornita dal produttore, fa riferimento alle comuni esigenze di utilizzo:

METRI CUBI DA AERARE	POTENZA RICHiesta (Kilowatt)
41	2
68	2,6
108	3,5
135	4,4
162	5,3
216	6,1
270	7,2

1. In base ai dati disponibili e alla scheda tecnica, stima la potenza in kilowatt necessaria, giustificando la tua scelta.

In occasione di una riunione di condominio, un rilevatore di CO_2 installato nella sala indica una concentrazione dello 0,3%; i condomini chiedono quindi di accendere l'impianto di aerazione, in modo che all'ora di inizio della riunione la concentrazione sia stata ridotta allo 0,15%. Il sistema di aerazione immette nella sala $20 \text{ m}^3/\text{minuto}$ di aria fresca contenente lo 0,1% di CO_2 .

2. Approssimando il volume della sala a 130 m^3 , ricava l'equazione differenziale che descrive l'andamento della concentrazione $c(t)$ in funzione del tempo t (espresso in minuti). Verifica inoltre che la funzione $c(t) = k \cdot e^{-(2/13)t} + h$ è una soluzione di tale equazione differenziale.
3. Determina i valori da assegnare alle costanti k e h in modo che la funzione $c(t)$ rappresenti l'andamento della concentrazione di CO_2 a partire dall'istante $t = 0$ di accensione dell'aeratore. Stabilisci quindi quanto tempo prima dell'inizio della riunione esso deve essere acceso, per soddisfare la richiesta dei condomini.
4. L'impianto è in funzione da 10 minuti, quando i 50 partecipanti alla riunione accedono alla sala. Considerando che l'impianto rimane acceso anche durante la riunione e che un essere umano mediamente espira 8 litri/minuto di aria contenente il 4% di CO_2 (fonte: OSHA, *Occupational Safety and Health Administration*), descrivi in termini qualitativi come cambierà l'andamento di $c(t)$ dopo l'ingresso dei condomini nella sala, giustificando la tua risposta.

2) Fissato $k \in \mathbb{R}$, la funzione $g_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è così definita: $g_k(x) = e^{-kx^2}$.

Si indica con Γ_k il suo grafico, in un riferimento cartesiano Oxy .

- 1) Descrivi, a seconda delle possibili scelte di $k \in \mathbb{R}$, l'andamento della funzione g_k .
- 2) Determina per quali $k \in \mathbb{R}$ il grafico Γ_k possiede punti di flesso e dimostra che, in tali casi, le ordinate dei punti di flesso non dipendono dal valore di k e che le rette tangenti nei punti di flesso, qualunque sia k , passano tutte per il punto $T\left(0, \frac{2}{\sqrt{e}}\right)$.

Assumi nel seguito $k > 0$. Sia S_k la regione di piano compresa tra l'asse x e Γ_k .

- 3) Prova che esiste un unico rettangolo R_k di area massima, tra quelli inscritti in S_k e aventi un lato sull'asse x , e che tale rettangolo ha tra i suoi vertici i punti di flesso di Γ_k . È possibile scegliere k in modo che tale rettangolo R_k sia un quadrato?
- 4) Posto

$$G(t) = 2\pi \int_0^t x \cdot e^{-x^2} dx,$$

determina il valore di

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} G(t),$$

e interpreta il risultato in termini geometrici.

Questionario

1) Si consideri questa equazione differenziale: $y'' + 2y' + 2y = x$. Quale delle seguenti funzioni ne è una soluzione? Si giustifichi la risposta.

- | | |
|---|----------------------|
| a) $y = e^{-x}(\sin x + \cos x) + x$ | b) $y = 2e^{-x} + x$ |
| c) $y = e^{-x}(\sin x + \cos x) + \frac{1}{2}(x - 1)$ | d) $y = e^{-2x} + x$ |

2) Data la funzione così definita in $\mathbb{R}$:

$$f(x) = x \cdot e^{-|x^3-1|},$$

determinarne minimi, massimi ed eventuali asintoti.

3) Determinare la velocità di variazione dello spigolo di un cubo, sapendo che il volume del cubo è pari a $0,1 \text{ m}^3$ e sta diminuendo alla velocità di $1200 \text{ cm}^3/\text{sec}$.

4) Posto, per $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \int_0^1 x^n e^x dx$, stabilire il valore di A_1 e dimostrare che, per ogni $n > 0$, si ha $A_n = e - nA_{n-1}$.

5) I lati di un triangolo ABC misurano: $AB = 5 \text{ cm}$, $BC = 6 \text{ cm}$, $CA = 5 \text{ cm}$. Preso a caso un punto P all'interno del triangolo, qual è la probabilità che P sia più vicino al vertice B che al vertice A ?

6) I punti $A(3, 4, 1)$, $B(6, 3, 2)$, $C(3, 0, 3)$, $D(0, 1, 2)$ sono vertici di un quadrilatero $ABCD$. Si dimostri che tale quadrilatero è un parallelogramma e si controlli se esso è un rettangolo.

7) Determinare la distanza tra il punto $P(2, 1, 1)$ e la retta:

$$\begin{cases} x + y = z + 1 \\ z = -y + 1. \end{cases}$$

8) Supponiamo che l'intervallo di tempo t (in anni) tra due cadute di fulmini in un'area di 100 m^2 sia dato da una variabile casuale continua con funzione di ripartizione:

$$P(t \leq z) = \int_0^z 0,01 \cdot e^{-0,01s} ds.$$

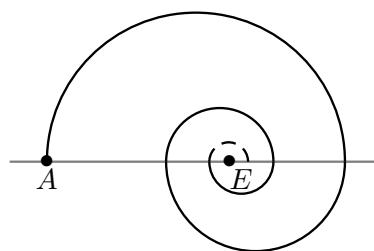
- Si calcoli la probabilità che, in tale area, i prossimi due fulmini cadano entro non più di 200 anni l'uno dall'altro.
- Si determini qual è il minimo numero di anni z , tale che sia almeno del 95% la probabilità che i prossimi due fulmini cadano in tale area entro non più di z anni l'uno dall'altro.

9) Una curva “a spirale” inizia nel punto A , come indicato in figura, ed è formata congiungendo un numero infinito di semicirconferenze di diametri sempre più piccoli. Il diametro d_1 della prima semicirconferenza è di 80 cm. Il diametro d_2 della seconda è pari ai $\frac{3}{5}$ di d_1 . Il diametro d_3 della terza è pari ai $\frac{3}{5}$ di d_2 , e così via: $d_{n+1} = \frac{3}{5}d_n$ per ogni n .

Con lo sviluppo della curva, gli estremi delle varie circonferenze tendono al cosiddetto “occhio” E della spirale (ossia l'unico punto contenuto in tutti i vari diametri).

Qual è la distanza (in linea retta) tra il punto A e il punto E ?

E qual è la lunghezza del cammino che va da A a E , percorrendo l'intera curva?



10) Si stabilisca il valore del limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - 73 \cdot \cos^3\left(4x + \frac{\pi}{11}\right)}{5x - \sin^2\left(x - \frac{\pi}{7}\right)},$$

motivando adeguatamente la risposta.

Esame 2017 suppletiva

Problemi

- 1) Un gioco si svolge su un tabellone, che è suddiviso in tre settori A , B , C , come in figura 1.

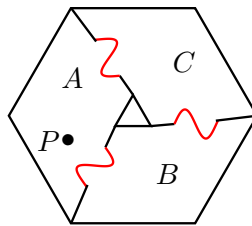


Figura 1

Nei vari settori possono essere collocate alcune pedine. I settori confinano a due a due attraverso tre varchi (rappresentati nella figura con tratti ondulati). Prima di ogni partita, per ciascun varco si effettua un sorteggio che stabilisce se esso sarà aperto oppure chiuso. La probabilità che un varco sia aperto è pari a un certo valore x (lo stesso per tutti e tre) ed i tre sorteggi sono tra loro indipendenti.

Durante il gioco, una pedina potrà spostarsi attraverso i varchi aperti. In questo modo, a seconda di quali varchi sono aperti, la pedina P , inizialmente collocata in A , potrebbe raggiungere o tutti e 3 i settori, oppure solo 2 (A e un altro), oppure 1 solo (non può uscire da A).

Indichiamo con $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ le probabilità che i settori raggiungibili dalla pedina P partendo da A siano solo 1, oppure 2, oppure 3.

- 1) Dimostrare che

$$p_1(x) = (1 - x)^2, \quad p_2(x) = 2x(1 - x)^2, \quad p_3(x) = x^3 + 3x^2(1 - x)$$

e tracciare, in uno stesso diagramma, i grafici delle funzioni $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ per $x \in [0, 1]$.

- 2) È vero che, qualunque sia $x \in [0, 1]$, almeno una delle probabilità $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ deve essere maggiore di 0,3 e almeno una deve essere minore di 0,4?
3) Provare che esiste un unico $x_0 \in [0, 1]$ tale che:

$$p_1(x_0) = p_3(x_0)$$

e stabilire se vale la disuguaglianza:

$$x_0 > \frac{1}{2}.$$

Discutere inoltre, al variare di x in $[0, 1]$, quali delle tre possibilità indicate (che i settori raggiungibili da P siano 1, 2 o 3) sono più probabili e quali meno.

- 4) Stabilire quali sono i tre valori medi delle funzioni che esprimono le probabilità $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$. Nel caso $x = \frac{1}{2}$ quali sono il valor medio e la varianza della variabile casuale che fornisce il numero di settori raggiungibili da P ?

- 2) Data una funzione $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ovunque derivabile, consideriamo la funzione

$$f(x) = g(x) \sin(2x).$$

- 1) Dimostra che i grafici delle funzioni f e g sono tangenti nei loro punti di ascissa $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, con k numero intero.
- 2) Determina la funzione $g(x)$ in modo tale che sia soddisfatta l'equazione differenziale $g'(x) = -2g(x)$ e che risulti $g(0) = 4$.
- 3) Il grafico della funzione f presenta dei massimi relativi nei punti di ascissa $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ (k intero)? Presenta dei flessi in tutti i suoi punti d'intersezione con l'asse x ? Motiva le tue risposte.
- 4) Determina il valore di

$$I = \int_0^{+\infty} f(x) \, dx$$

e posto

$$H = \int_0^{+\infty} |f(x)| \, dx$$

dimostra che H è finito e determina in modo approssimato il suo valore. Che cosa rappresentano, in termini geometrici, i valori di I e H ?

Questionario

- 1) Consideriamo la funzione $f(x) = e^{3-x}$. Preso un numero reale a , sia R_a la regione illimitata formata dai punti aventi ascissa $x > a$ che sono compresi tra il grafico di f e l'asse x . Per quale valore di a l'area di R_a risulta pari a 2?
- 2) Determinare l'equazione della retta perpendicolare nel punto $(1, 0, 3)$ al piano di equazione $3x + 2y - z = 0$.
- 3) Una variabile aleatoria, i cui valori appartengono all'intervallo $[0; 2]$, è distribuita secondo la densità di probabilità data da $p(x) = k \cdot x^2(2 - x)$, dove k è una costante opportuna. Si stabilisca il valor medio della variabile aleatoria considerata.
- 4) Rappresentare il grafico della funzione:

$$f(x) = \left| \frac{3 - 2x}{x - 3} \right|$$

Verificare se negli intervalli $[0; 2]$ e $[4; 6]$ valgono le ipotesi del teorema di Lagrange, e in caso affermativo trovare i punti la cui esistenza è prevista dal teorema di Lagrange. Esiste un intervallo $[a; b]$ in cui si possa applicare il teorema di Rolle? Giustificare la risposta.

- 5) Sia $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$. Determinare $f^{(2017)}(x)$, esplicitando, in modo chiaro ed esauriente, il procedimento seguito.

6) Determinare la distanza tra il punto $P(6, 6, 8)$ e la retta:

$$\begin{cases} x - y = 2z + 1 \\ z = y + 1. \end{cases}$$

7) Alberto e Barbara giocano lanciando un dado. Quando esce 1, 2, 3 o 4 Alberto fa 1 punto, quando esce 5 o 6 Barbara fa 2 punti. Vince chi arriva per primo a 6 punti. Qual è la probabilità che entrambi realizzino almeno 1 punto nel corso della partita? Qual è la probabilità che, in un certo momento della partita, il punteggio sia di 4 a 4?

8) Stabilire se le rette:

$$r: y = 5x - 6$$

$$s: y = 21x + 25$$

sono tangenti alla curva δ di equazione:

$$y = x^3 - 2x^2 + x + 1.$$

9) Data la funzione:

$$f(x) = x^2 + 1 \quad x \in \mathbb{R}$$

determinare il volume del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse delle y della porzione di piano delimitata dal grafico di $f(x)$ e dall'asse delle ascisse per $x \in [0; 3]$.

10) Trovare una funzione g , il cui insieme di definizione sia un qualsiasi intervallo contenente 0, tale che:

$$g(0) = 0 \quad g'(0) = 0 \quad g''(0) = 0 \quad g'''(0) = 0 \quad g^{(4)}(0) = 1 \quad g^{(5)}(0) = 1.$$

[Prove suppletive:](#) [indice](#)

Esame 2018 suppletiva

Problemi

1) Un artigiano deve realizzare una cornice in cui inscrivere uno specchio di forma circolare. A partire da una tavola quadrata di lato 3π decimetri (approssimato alla seconda cifra decimale), adoperando una macchina a controllo numerico (*CNC*), incide su ciascun lato una decorazione che rappresenta una porzione di curva goniometrica come si vede in figura 1.

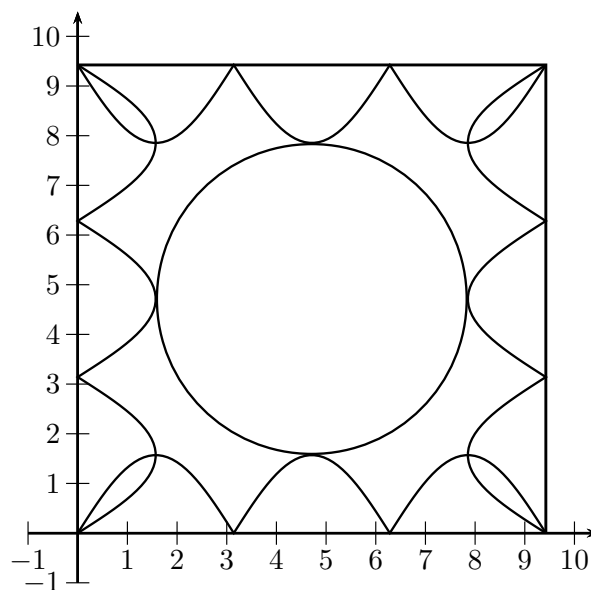


Figura 1

La macchina traccia sul lato giacente sull'asse delle ascisse la curva descritta dalla funzione $y = k|\sin(x)|$ con $x \in [0, 3\pi]$ e k parametro reale positivo. La cornice viene ruotata per realizzare la decorazione su ciascun lato. (La precisione della macchina è di 10^{-4} m, quindi al di sopra della precisione richiesta dalle misure della cornice).

1. Per ottenere la decorazione, occorre che le curve su due lati consecutivi si intersechino nel loro punto di massimo più vicino al vertice della cornice. Verifica che tale richiesta è soddisfatta per $k = \frac{\pi}{2}$. La decorazione presenta delle “foglie” (colorate in grigio in figura 2) in corrispondenza dei quattro vertici. L'artigiano vuole rivestire queste quattro regioni con una polvere ceramica. Determina l'area, espressa in dm^2 , della superficie da ricoprire.

Volendo offrire ai clienti la possibilità di inserire nella cornice uno specchio di dimensioni maggiori, l'artigiano ne realizza un'altra con il lato delle stesse misure della precedente, ma con le quattro curve goniometriche che hanno in comune solo i vertici della cornice, così come in figura 3.

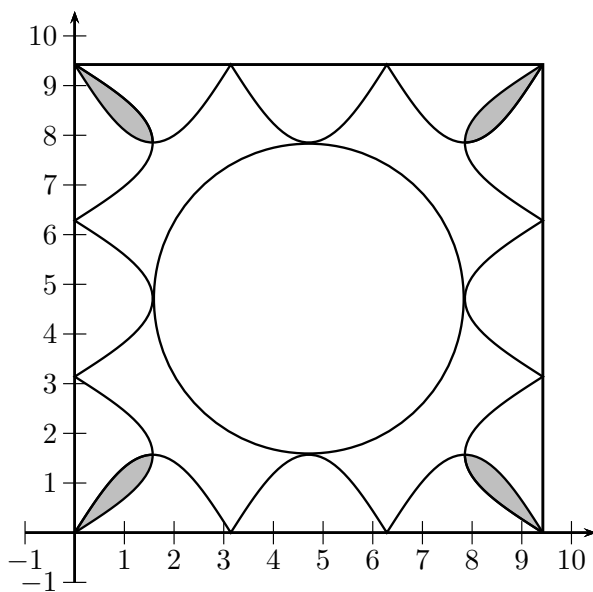


Figura 2

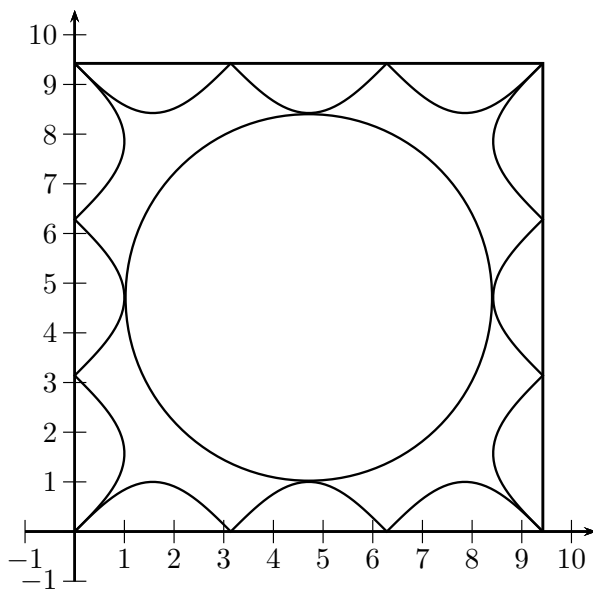


Figura 3

2. Verifica che per ottenere una decorazione di questo tipo occorre impostare nella macchina *CNC* un valore di k compreso tra 0 e 1 e che per $k = 1$ due decorazioni consecutive sono tangenti nel vertice della cornice. Determina inoltre, in funzione di $k \in [0, 1]$, l'area della parte di cornice compresa tra i lati e le quattro curve goniometriche, esprimendola in dm^2 .
3. L'artigiano ha ovviamente l'esigenza di offrire la cornice a clienti che hanno specchi circolari di dimensioni diverse. Determina in funzione del parametro k l'area dello specchio tangente alle quattro curve goniometriche e stabilisci quindi l'area minima e massima possibile dello specchio.

Un cliente, per cui è stata realizzata una cornice con $k = 1$, chiede che la regione compresa tra lo specchio e le quattro curve venga dipinta con una vernice di cui l'artigiano possiede un flacone da 125 ml.

4. Dal momento che con 1 litro di vernice è possibile coprire 4 m^2 di superficie, la quantità a disposizione è sufficiente per passare due mani di vernice? Per quale valore di k la quantità di vernice richiesta è massima?

2) Fissato un numero reale $k > 0$, si definiscono le funzioni

$$f_k(x) = k \cdot \ln(x) \quad \text{e} \quad g_k(x) = e^{x/k},$$

i cui grafici sono indicati, rispettivamente, con F_k e G_k .

1. Verifica che, qualunque sia $k > 0$, le due funzioni f_k e g_k sono tra loro inverse; definite inoltre le funzioni:

$$a(x) = f_k(g_k(x)) \quad \text{e} \quad b(x) = g_k(f_k(x)),$$

stabilisci se si verifica $a(x) = b(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. Indicata con r la retta di equazione $y = x$, determina l'equazione della retta s_2 , parallela a r e tangente al grafico F_2 della funzione $f_2(x) = 2 \ln(x)$. Determina inoltre l'equazione della retta t_2 , parallela a r e tangente al grafico G_2 della funzione $g_2(x) = e^{x/2}$.

Rappresenta i grafici F_2 e G_2 insieme alle rette s_2 e t_2 e stabilisci qual è la distanza minima tra un punto di F_2 e un punto di G_2 .

3. Verifica che l'equazione $f_3(x) = g_3(x)$ possiede due soluzioni sapendo che, qualunque sia $k > 0$, gli eventuali punti di intersezione tra il grafico f_k e il grafico G_k coincidono con i punti di intersezione tra uno qualsiasi di tali grafici e la retta di equazione $y = x$. Stabilisci inoltre per quali valori di $k > 0$ i grafici F_k e G_k sono secanti, per quali valori sono disgiunti e per quale valore essi sono tangenti.
4. Sia A la regione limitata compresa tra i grafici F_e e G_e e gli assi cartesiani. Determina l'area di A ed il volume del solido generato ruotando A attorno a uno degli assi cartesiani.

Questionario

1) Considerati nel piano cartesiano i punti $A(0,0)$ e $B(\pi,0)$, sia R la regione piana delimitata dal segmento AB e dall'arco di curva avente equazione $y = 4 \sin x$, con $0 \leq x \leq \pi$. Calcolare il massimo perimetro che può avere un rettangolo inscritto in R avente un lato contenuto nel segmento AB .

2) Si consideri la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ nell'intervallo $[p, 2p]$ e, detto Γ il suo grafico, sia t la retta tangente a Γ nel suo punto di ascissa p . Determinare, al variare di p , le aree delle due parti in cui la retta t divide la regione finita di piano compresa fra Γ e l'asse delle ascisse.

3) Determinare l'equazione della superficie sferica di centro $C(1, -1, 2)$ tangente al piano di equazione $x - y + z = 10$ e le coordinate del punto di contatto tra la superficie sferica e il piano.

4) Verificare che $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) \, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x) \, dx$ per $n > 1$ e usare questo risultato per calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x) \, dx$.

5) Si lancia n volte un dado regolare a sei facce. Qual è il più piccolo valore di n tale che la probabilità che non esca mai il numero 3 sia minore dello 0,01%?

6) Data la funzione $y = x|ax^2 + b| - 3$, determinare il valore dei coefficienti a e b per i quali il grafico della funzione è tangente nel punto di ascissa $x = 1$ alla retta di equazione $y = 7x - 9$.

7) Date le curve γ_1 e γ_2 di equazioni rispettivamente $y = x^2 + 1$ e $y = x^2 - 8x + 9$, sia t la retta che è tangente a entrambe. Stabilire l'area della regione piana di area finita che è delimitata da γ_1 , γ_2 e t .

8) Una variabile casuale, a valori nell'intervallo $[0, 10]$, è distribuita secondo la densità di probabilità data dalla funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{1}{4}x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{12}, & 1 < x \leq 10. \end{cases}$$

Stabilire il valore medio e il valore mediano di questa variabile casuale.

9) Determinare il luogo geometrico dei punti $P(x, y, z)$ equidistanti dai punti $A(0, 1, 2)$ e $B(-3, 2, 0)$.

10) Verificare che la funzione $y = e^{-x} \sin x$ è soluzione dell'equazione differenziale $y'' + 2y' + 2y = 0$.

[Prove suppletive:](#) [indice](#)