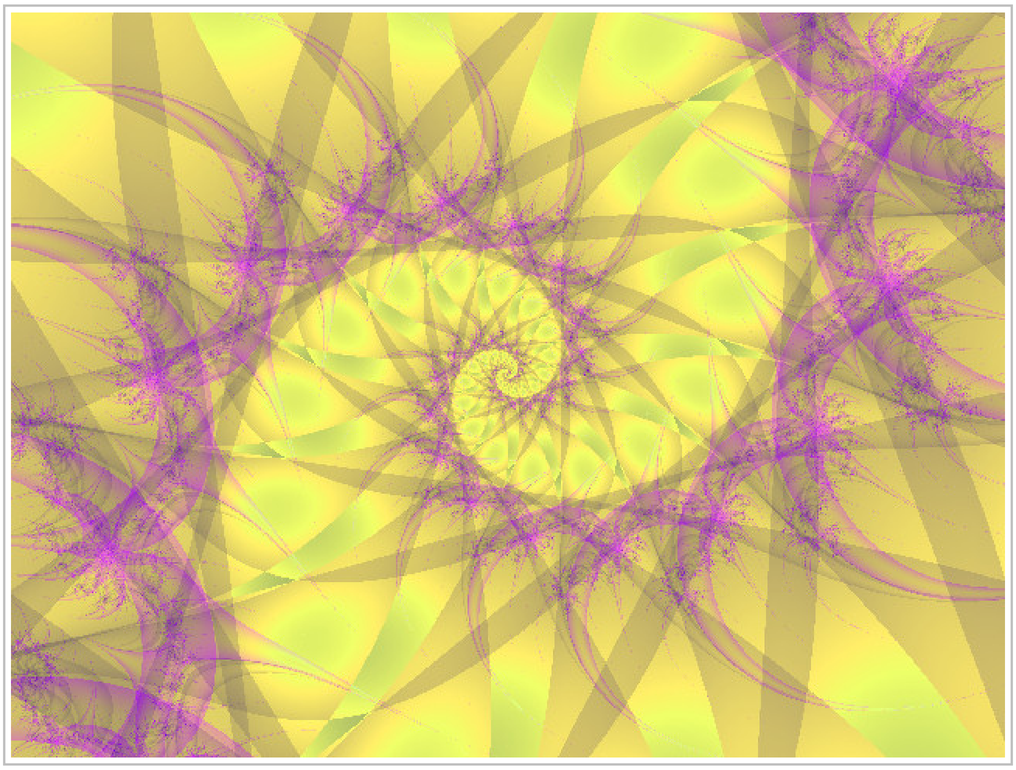
Insiemi, Funzioni e Trasformazioni



LORENZO ROI

Edizioni H–ALPHA

Copertina: particolare dell'insieme di Mandelbrot centrato in
$(-0.829714213098424, -0.237283246962231)$ e ingrandito 138146 volte.
Titolo: `Trame frattali`.

INDICE

CAPITOLO 1

Lo scopo di queste note è di introdurre o rivedere alcuni concetti della Teoria Ingenua degli Insiemi, concetti che costituiscono una base per lo sviluppo di molte aree della Matematica avanzata e in particolare dell'Algebra. L'approccio che seguiremo vuole essere prevalentemente intuitivo e non assiomatico e quindi ci si soffermerà solo sulle proprietà che più spesso si ritrovano negli sviluppi successivi del programma di un triennio di liceo. Nel contempo, quando possibile, verranno proposte delle adeguate formalizzazioni per le principali definizioni e proprietà.

Il primo capitolo è sostanzialmente una revisione di alcune nozioni trattate generalmente all'inizio di un percorso di studi secondari superiori. Non sono pertanto necessari particolari requisiti per la sua comprensione. Il secondo invece richiede la conoscenza di elementi di algebra quali le equazioni di primo e secondo grado e di semplici disequazioni. Questi due capitoli possono quindi essere svolti nei primi mesi di una classe terza. L'ultimo capitolo potrà invece essere svolto dopo aver trattato la consueta geometria analitica relativa a rette e coniche.

1.1 Concetto di insieme

I tentativi per definire cosa intendere per *insieme* si sono tutti risolti nell'uso di sinonimi: collezione, classe, gruppo ... Quanto scrisse Georg Cantor, matematico tedesco che nella seconda metà del secolo scorso sviluppò una teoria astratta degli insiemi, ossia *"un insieme è una collezione di oggetti, determinati e distinti, della nostra percezione o del nostro pensiero, concepiti come un tutto unico; tali oggetti si dicono elementi dell'insieme"*, non ha altro significato se non quello di evocare un concetto già presente nella nostra mente, ossia *primitivo*. Pertanto si assume il concetto di insieme come primitivo così come quello di elemento. Conosciamo già cosa intendere per insieme e quindi non è necessario proporne una definizione (che non potrebbe essere che circolare).

La natura degli oggetti costituenti l'insieme non è rilevante ma ciò che invece risulta essenziale è che si sappia distinguere se un dato oggetto appartenga o meno ad un insieme. Allora deve essere vera una delle due possibilità:

- il dato oggetto è un elemento dell'insieme considerato,
- il dato oggetto non è elemento dell'insieme considerato.

Evidentemente una frase del tipo "l'insieme degli studenti che non amano la matematica", non definisce con la necessaria precisione alcun insieme, non fornendo alcuna indicazione su che cosa significhi il "non amare la matematica"!

Denotando gli insiemi con le lettere maiuscole e gli elementi tramite le minuscole potremo pertanto identificare un insieme tramite la

$$A = \{a, b, c, \dots\} \quad \text{oppure} \quad A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \quad \text{con } n \text{ intero positivo.}$$

Un insieme è pertanto individuato dai suoi elementi, affermazione questa che costituisce il **principio di estensione**.

Se A è un insieme, la prima eventualità si denota come $x \in A$, scrittura che significa *"x appartiene ad A"* oppure che *"x è un elemento dell'insieme A"*, mentre la sua negazione si simbolizza come $x \notin A$ e vuol significare che *"x non appartiene all'insieme A"*.

La scrittura introdotta può comunque essere utile solo per insiemi contenenti un numero molto ristretto di elementi, per esempio le soluzioni $\{0, 1\}$ dell'equazione $x^3 - x^2 = 0$, ma non è adeguata quando gli elementi diventano numerosi o addirittura infiniti. La notazione alternativa si basa sull'idea che un insieme sia costituito da tutti gli elementi che soddisfano ad una certa proprietà. Per esempio l'insieme A delle coppie di numeri reali (x, y) che appartengono alla parabola $y = x^2 + 1$ può denotarsi come $A = \{(x, y) \mid y = x^2 + 1\}$ e dove le parentesi stanno per *"l'insieme di"*, la barra verticale per *"tale che"*, mentre la proprietà che deve essere soddisfatta è $y = x^2 + 1$: analogamente, per indicare l'insieme di tutti i numeri dispari si potrà scrivere

$$D = \{x \mid x \text{ è un numero dispari}\}.$$

In generale quindi un insieme sarà identificato dalla scrittura

$$A = \{x \mid \mathcal{P}(x)\}$$

che si legge come *"A è l'insieme degli x per cui è vera la proprietà $\mathcal{P}(x)$"*. L'assegnare quindi una proprietà $\mathcal{P}(x)$ equivale all'esistenza di un insieme e ciò costituisce il cosiddetto **principio di astrazione**. Ne segue che se la proprietà assegnata risulta falsa per ogni elemento, per esempio $x \neq x$, in tal modo si viene a indicare un insieme che non contiene nessun elemento ossia l'insieme vuoto

$$\varnothing = \{x \mid x \neq x\}.$$

1.2 L'algebra degli insiemi

Siano A e B due insiemi. Diremo che

DEFINIZIONE 1.1. *A è un sottoinsieme di B o parte di B, $A \subseteq B$, se e solo se tutti gli elementi di A sono pure elementi di B.*

Nel linguaggio formale della teoria degli insiemi ciò si scrive come

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow (\forall\, x \in A \Longrightarrow x \in B),$$

dove si è introdotto il simbolo $\forall$ che significa *"per ogni"* e viene detto in quest'ambito *quantificatore universale*. Il secondo quantificatore che si considera è il *quantificatore esistenziale*, è il simbolo $\exists$, e sta in luogo di *"esiste"* oppure *"esiste almeno un"*. Per intendere quindi che la proprietà $\mathcal{P}(x)$ è vera per ogni elemento x di un certo insieme A si scriverà

$$\forall\, x \in A \mid \mathcal{P}(x),$$

mentre se esiste almeno un x di A per cui $\mathcal{P}(x)$ è vera allora si scrive

$$\exists\, x \in A \mid \mathcal{P}(x).$$

Se esiste almeno un elemento di B che non appartiene ad A allora

DEFINIZIONE 1.2. *A è un sottoinsieme proprio di B,*

$$A \subset B \Longleftrightarrow (A \subseteq B,\ \exists\, x \in B \mid x \notin A).$$

Per mezzo del simbolo di inclusione ($\subseteq$) si può riformulare il principio di estensione dicendo che due insiemi sono uguali quando contengono gli stessi elementi ossia

$$A = B \Longleftrightarrow (x \in A \Longleftrightarrow x \in B)$$

ossia

$$A = B \Longleftrightarrow (A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A).$$

Poiché l'insieme vuoto $\varnothing$ è considerato sottoinsieme di qualsiasi insieme $\varnothing \subseteq A$ e pure si ha $A \subseteq A$, ne segue che ogni insieme non vuoto possiede almeno due sottoinsiemi (detti *impropri*), se stesso e $\varnothing$.

Un altro insieme, detto *insieme potenza* o *insieme delle parti*, e che si associa all'insieme A è *l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A*, $P(A)$.

DEFINIZIONE 1.3. *L'insieme potenza* è $P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$.

Sia per esempio $A = \{a, b, c\}$. L'elenco completo dei sottoinsiemi risulta

$$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

pertanto è

$$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\},$$

insieme che contiene $2^3 = 8$ elementi. In generale, è possibile dimostrare che se A contiene n elementi allora $P(A)$ ne contiene 2^n.

Si definisce *intersezione* di A e B l'insieme $A \cap B$ di tutti gli elementi x che appartengono ad A e contemporaneamente a B cioè

DEFINIZIONE 1.4. $A \cap B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}$,

dove per la prima volta, appare il simbolo $\wedge$ che significa *"e"*, e costituisce il connettivo logico di *congiunzione*. L'importanza di questo e di altri che verranno affrontati in seguito, consiste nel permettere di costruire con chiarezza delle proposizioni composte a partire da proposizioni più semplici e in modo tale che le espressioni risultanti possano effettivamente rappresentare degli insiemi ossia siano delle *"formule"* corrette.

Ammesso che p e q siano delle proposizioni o vere (*valore di verità* =1) o false (*valore di verità* = 0), intenderemo che la proposizione $p \wedge q$ sia vera se e solo se p e q sono vere: in tutti gli altri casi $p \wedge q$ sarà considerata falsa. La tabella rappresentativa della congiunzione $\wedge$ (o anche *"and"*) è pertanto la seguente.

Connettivo AND		
p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

L'intersezione gode delle seguenti proprietà che, dato il loro carattere intuitivo, enunciamo senza dimostrare:

PROPRIETÀ COMMUTATIVA. $A \cap B = B \cap A$.

PROPRIETÀ ASSOCIATIVA. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$.

Nel caso sia $A \cap B = \varnothing$ gli insiemi A e B si dicono *disgiunti*.

La successiva operazione fondamentale tra insiemi dopo l'intersezione è l'*unione*. Tale operazione associa agli insiemi A e B l'insieme $A \cup B$ costituito dagli elementi che appartengono ad A o a B cioè

Definizione 1.5. $A \cup B = \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}$.

Il simbolo $\vee$ significa *"o"*, *"oppure"*, e costituisce il connettivo di *disgiunzione*. In corrispondenza delle proposizioni p e q, la proposizione composta $p \vee q$ possiede i valori di verità definiti dalla tabella sottostante. La proposizione $p \vee q$ è vera se p oppure (*vel*) q è vera, falsa se p e q sono entrambe false: almeno una delle due proposizioni componenti deve quindi essere vera.

Connettivo OR		
p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Ne segue che gli elementi di $A \cup B$ possono appartenere ad uno solo dei due insiemi oppure ad entrambi.

Onde completare il quadro dei connettivi logici fondamentali proponiamo le tabelle di verità di altri due connettivi, la *disgiunzione esclusiva* (*or esclusivo*, detto pure alla latina *aut* o anche *xor*), e della *negazione* (*not*). Nel primo caso l'affermazione complessiva $p \veebar q$ è vera solo se una sola delle due alternative è vera

Connettivo XOR		
p	q	$p \veebar q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

mentre la negazione $\overline{p}$ possiede ovviamente lo schema.

Connettivo NOT	
p	$\overline{p}$
1	0
0	1

Esempio 1.1. *Siano date le affermazioni (p = 10 è pari) e (q = 10 è dispari). Allora $p \veebar q$ = (10 è pari o (aut) dispari)*

Analogamente alla intersezione le proprietà principali dell'unione sono

Proprietà commutativa. $A \cup B = B \cup A$.

Proprietà associativa. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$.

Vi sono inoltre due leggi distributive:

Proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione.
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Proprietà distributiva dell'unione rispetto all'intersezione.
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Esercizio 1.1. *Dimostrare le precedenti due proprietà.*

Vi è una terza operazione tra insiemi, la *differenza* (o *complemento*). È definita come

Definizione 1.6. $A - B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$

ossia in $A - B$ sono compresi gli elementi di A che non appartengono a B. Una notazione alternativa è anche $A \setminus B$.

Nel caso che sia $B \subseteq A$ l'insieme differenza $A - B$ è detto l'*insieme complementare di B in A* cioè $\mathcal{C}_A(B) = A - B$ e A viene indicato come l'insieme *universo*.

1.3 Coppie ordinate e prodotto cartesiano

Riprendendo quanto detto all'inizio, dato un insieme A e un elemento x solo una delle seguenti affermazioni è vera: (i) $x \in A$, (ii) $x \notin A$. Ne segue che un insieme è nient'altro che una collezione di oggetti priva di altre condizioni e ciò significa che i due insiemi $\{a, b\}$ e $\{b, a\}$ in cui si sono elencati gli elementi in un ordine diverso, identificano lo stesso insieme.

L'intenzione è ora di definire degli insiemi dove vi sia imposto un ordine, insiemi quindi sui quali si possa distinguere se un elemento "viene prima" o "dopo" di un altro.

Definizione 1.7. *Una coppia ordinata (x, y) è l'insieme i cui elementi sono $x \in A$ e $y \in B$ e nella quale x è la prima componente (o prima coordinata), y la seconda.*

L'ordine imposto alla coppia (x, y) emerge dal punto di vista grafico scrivendo la prima componente a sinistra della seconda. Inoltre

Definizione 1.8. $(x, y) = (x', y') \Longleftrightarrow x = x' \ \wedge \ y = y'$.

L'insieme di tutte le coppie ordinate costruite a partire dagli insiemi A e B viene detto per analogia con la totalità dei punti della geometria analitica (il piano cartesiano), *prodotto cartesiano* ossia

Definizione 1.9. *Il prodotto cartesiano $A \times B$ è l'insieme*

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \ \wedge \ y \in B\}.$$

Ovviamente nel caso della geometria analitica gli insiemi A e B coincidono con l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ e si pone $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

Esempio 1.2. *Sia $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b\}$. Allora è pure*

$$\{1, 2, 3\} \times \{a, b\} = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}.$$

Conviene ribadire che la coppia ordinata (x, y) non va confusa con l'insieme $\{x, y\}$ in quanto per quest'ultimo vale sempre la $\{x, y\} = \{y, x\}$ mentre se $x \neq y$ risulta $(x, y) \neq (y, x)$.

Esercizio 1.2. *Si dimostri che il prodotto cartesiano non è commutativo ossia $A \times B \neq B \times A$.*

Diamo infine un'ultima definizione. Per ogni coppia (x, y) di $A \times B$ corrisponde la coppia (y, x) di $B \times A$. Allora

Definizione 1.10. *Dicesi coppia inversa della $(x, y) \in A \times B$ la coppia $(y, x) \in B \times A$.*

CAPITOLO 2

2.1 Concetto di relazione

Allo scopo di introdurre il concetto fondamentale di relazione supponiamo che sia definita sull'insieme $A \times B$ una qualche proprietà, per esempio, un elemento x di $A = \{1, 2, 3, 4\}$ è in corrispondenza con qualche elemento di $B = \{a, b, d, e, r, t\}$ se nel nome italiano degli elementi di A compare una qualche lettera di B. Ne segue che tra le possibili 24 coppie ordinate di $A \times B$ solo le 8 coppie

$$(2, d)\,, (2, e)\,, (3, e)\,, (3, r)\,, (3, t)\,, (4, a)\,, (4, r)\,, (4, t)$$

soddisfano alla condizione posta cioè pongono in relazione degli elementi di A con elementi di B. Queste coppie formano un sottoinsieme di $A \times B$.

Inversamente, considerato un sottoinsieme di $A \times B$ per esempio

$$\{(3, t)\,, (3, r)\,, (3, e)\}$$

questo definisce una corrispondenza tra l'elemento $3 \in A$ e gli elementi $t\,, r\,, e$ di B che possiamo interpretare come la corrispondenza che lega il simbolo di una cifra con le lettere dell'alfabeto che la esprimono in italiano.

Vi è pertanto un legame molto stretto tra il concetto di relazione così come è comunemente inteso e il prodotto cartesiano. Diamo quindi la seguente definizione:

Definizione 2.1. *Una relazione $\mathcal{R}$ dell'insieme A nell'insieme B è un sottoinsieme del prodotto cartesiano di $A \times B$, ossia $\mathcal{R} \subseteq A \times B$.*

Se $\mathcal{R}$ è una relazione tra A e B e se $(x, y) \in \mathcal{R}$, allora scriveremo $x\,\mathcal{R}\,y$ che si legge x *è in relazione* $\mathcal{R}$ *con* y oppure x *è in corrispondenza con* y. L'insieme $\mathcal{R}$ viene anche detto il *grafico* della relazione $\mathcal{R}$. Nel caso si abbia $A = B$ allora più brevemente si dirà che è assegnata una *relazione binaria* in A.

Riprendendo l'esempio iniziale notiamo che non tutti gli elementi di A sono in relazione con quelli di B (ne è esclusa la cifra 1) e analogamente dalla corrispondenza è escluso l'elemento b di B. Conviene pertanto definire in A e in B quei sottoinsiemi costituiti dagli elementi coinvolti nella corrispondenza. Pertanto

Definizione 2.2. *Il dominio di $\mathcal{R}$ è l'insieme*

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{R}) = \{x \in A \mid \exists\, y(x\mathcal{R}y)\}.$$

Definizione 2.3. *Il codominio di $\mathcal{R}$ è l'insieme*

$$\mathrm{Cod}(\mathcal{R}) = \{y \in B \mid \exists\, x(x\mathcal{R}y)\}.$$

Nell'esempio sopra è $\mathrm{Dom}(\mathcal{R}) = \{2, 3, 4\}$ mentre $\mathrm{Cod}(\mathcal{R}) = \{a, d, e, r, t\}$.

Inoltre, assegnata una relazione $\mathcal{R}$ di A in B risulta definita una relazione di B su A formata dalle coppie $(y, x) \in B \times A$ in modo che sia $x\,\mathcal{R}\,y$. Definiamo quindi

Definizione 2.4. *Sia $\mathcal{R}$ una relazione tra A e B. La relazione inversa di $\mathcal{R}$ è la relazione $\mathcal{R}^{-1} \subseteq B \times A$ data da*

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in \mathcal{R}\}.$$

L'esempio sopra implica

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(d, 2), (e, 2), (e, 3), (r, 3), (t, 3), (a, 4), (r, 4), (t, 4)\}.$$

2.2 Proprietà delle relazioni

Lo studio delle relazioni si basa principalmente sulla classificazione delle loro proprietà e quindi sulla suddivisione in tre grandi classi:

- le relazioni d'ordine,
- le relazioni di equivalenza,
- le funzioni.

Delle prime due daremo solo alcuni cenni, mentre si approfondirà l'analisi delle proprietà delle funzioni.

Sia $\mathcal{R}$ una relazione binaria in A ossia $\mathcal{R} \subseteq A \times A = A^2$. Diremo che

Definizione 2.5. *$\mathcal{R}$ è riflessiva $\iff \forall\, x \in A\ (x\mathcal{R}x)$.*

Definizione 2.6. *$\mathcal{R}$ è simmetrica $\iff (x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x)$.*

Definizione 2.7. *$\mathcal{R}$ è transitiva $\iff (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z)$.*

DEFINIZIONE 2.8. *$\mathcal{R}$ è antisimmetrica* $\iff (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \implies x = y)$.

DEFINIZIONE 2.9. *$\mathcal{R}$ è antiriflessiva* $\iff \forall\, x \in A\, \overline{(x\mathcal{R}x)}$.

Proponiamo per esercizio alcuni esempi:

ESERCIZIO 2.1. *Sia $\mathbb{Z}$ l'insieme degli interi (positivi, negativi e lo zero). Allora $x\mathcal{R}y \iff (x - y)$ è un intero pari. Dimostrare che $\mathcal{R}$ gode delle proprietà 2.5, 2.6, 2.7.*

ESERCIZIO 2.2. *Sia $\mathbb{R}^+$ l'insieme dei reali non negativi. $x\mathcal{R}y \iff xy = 1$. Dimostrare che soddisfa solo alla 2.6.*

ESERCIZIO 2.3. *Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei naturali. $x\mathcal{R}y \iff x + 2y = 10$ soddisfa solo alla proprietà 2.9.*

ESERCIZIO 2.4. *Sia $\mathbb{N}_0$ l'insieme dei naturali positivi. $x\mathcal{R}y \iff \exists\, n \in \mathbb{N}_0 \mid y = nx$. Questa soddisfa alle 2.5, 2.7, 2.8.*

ESERCIZIO 2.5. *Sia $A \neq \varnothing$ e $P(A)$ l'insieme delle parti. La relazione su $P(A)$ tale che $X_1\mathcal{R}X_2 \iff X_1 \subseteq X_2$ risulta riflessiva, transitiva e antisimmetrica.*

In base alle precedenti proprietà le relazioni (binarie) si classificano in

DEFINIZIONE 2.10. *Relazione d'ordine largo (stretto) nell'insieme $A \iff$ risulta riflessiva (antiriflessiva), transitiva, antisimmetrica.*

DEFINIZIONE 2.11. *Relazione di equivalenza sull'insieme $A \iff$ risulta riflessiva, simmetrica, transitiva.*

L'importanza delle relazioni d'ordine consiste nel fatto di permettere di ordinare gli elementi di un insieme e quindi di poter eseguire, a diversi livelli, dei confronti fra questi. Gli insiemi dotati di relazioni di questo tipo si dicono *insiemi ordinati*.

Le relazioni di equivalenza (simbolo $\sim$) permettono invece di suddividere l'insieme A nelle cosiddette *classi di equivalenza* dell'elemento x, insiemi costituiti dagli elementi di A che sono in relazione con x cioè

$$[x] = \{y \in A \mid y \sim x\}.$$

A seguito della riflessività di $\mathcal{R}$, l'elemento x appartiene alla propria classe di equivalenza che perciò non è vuota. La transitività implica invece che classi di equivalenza distinte siano disgiunte ossia non possiedono elementi in comune. Ne segue che le classi di equivalenza danno luogo ad una decomposizione dell'insieme di partenza come unione di sottoinsiemi a due a due disgiunti. In tal caso si dice che queste costituiscono una *partizione* di A. L'insieme i cui elementi sono le classi di equivalenza è l'*insieme quoziente* e si indica come $A/\mathcal{R}$.

L'importanza delle relazioni di equivalenza consiste nel riconoscere che un certo insieme di elementi (la classe di equivalenza) possiede una proprietà comune. Così le classi di equivalenza si considerano come dei nuovi “oggetti”, rappresentativi della proprietà che accomuna gli elementi dell’insieme di partenza. Il definire pertanto l’insieme quoziente non è altro che una formalizzazione del *processo di astrazione* utilizzato dalla nostra mente, processo che permette la formazione di nuovi concetti a partire dall’osservazione delle proprietà comuni agli oggetti.

2.3 Concetto di funzione

Uno dei concetti più importanti di tutta la matematica per i suoi sviluppi e per la sua generalità è senz’altro la nozione di funzione (o applicazione). Spesso risulta sufficiente affrontare lo studio di tale nozione basandosi su una definizione che trova la sua giustificazione nel concetto intuitivo di corrispondenza, concetto che in un tale contesto non viene formalizzato. La teoria sviluppata finora permette invece una precisa definizione di funzione, definizione comunque che non vuole escludere il carattere intuitivo detto sopra ma che anzi ne chiarisce e precisa i collegamenti con il concetto di relazione.

Riprendendo l’esempio proposto all’inizio del paragrafo (2.1), possiamo notare come all’elemento $1 \in A$ non corrisponda alcun elemento di B, 2 è in corrispondenza con due elementi di B $\{d, e\}$ mentre a 3 e a 4 sono associati tre elementi di B. In una relazione vi possono pertanto essere elementi di A che non sono in relazione con alcun elemento di B cioè

- $\exists\, x \in A \mid \overline{x\mathcal{R}y}$ e in tal caso il $\mathrm{Dom}(\mathcal{R}) \subset A$,

così come possono esistere elementi

- $x \in A$ e $y \in B$, $y' \in B$ con $y \neq y'$ tali che $x\mathcal{R}y$ e $x\mathcal{R}y'$ ossia un elemento di A può essere in relazione con più elementi distinti di B.

Onde salvaguardare la nozione intuitiva che considera una funzione una qualche “regola” o “insieme di regole” o “corrispondenza” che associa a ciascun elemento di un insieme un unico elemento di un altro insieme, dovremo escludere l’avverarsi delle due condizioni delineate sopra. Ne segue che la relazione $\mathcal{R}$ è una funzione di A in B se il $\mathrm{Dom}(\mathcal{R}) = A$ e ciascun $x \in A$ ha un unico elemento corrispondente in B. In definitiva

Definizione 2.12. $\mathcal{R}$ *è una funzione* $\iff \forall\, x \in A,\ \exists!\, y \in B \mid (x\mathcal{R}y)$.

e dove il simbolo $\exists!$ si legge *“esiste un solo”*.

In alternativa al termine di “funzione” si usa pure l’equivalente di *applicazione* o anche *mappa*[1]. Il simbolo usato è una lettera minuscola dell’alfabeto latino, generalmente f, per cui la coppia di elementi che sono in relazione è individuata da

[1] Alcuni autori intendono il termine di funzione in modo diverso da quello di applicazione. Per questi l’espressione *funzione di A in B* va intesa nel senso che ad ogni elemento di A può essere associato un solo elemento di B, *o anche nessuno*.

una delle scritture $x\mathcal{R}y$, $x\,f\,y$, $(x,y) \in f$ oppure più spesso, dalla $y = f(x)$ detta *equazione rappresentativa*. La seconda componente y della coppia ordinata (x,y) denotata anche da $f(x)$ è detta *immagine* di x tramite la f. L'elemento generico $x \in A$ rappresenta la *variabile indipendente* mentre y la *variabile dipendente*.

Ovviamente risulta Dom(f)= A ma poiché nella definizione non si esclude che per qualche elemento $y \in B$ non esista un $x \in A$ tale che $y = f(x)$ in generale si ha Cod(f)$\subseteq B$. Considerando il codominio come l'insieme immagine di A tramite la f discende naturale identificarlo con la notazione $f(A)$.

Infine per indicare sia la funzione che gli insiemi tra i quali agisce è comune la simbologia seguente

$$f : A \longrightarrow B \qquad \text{oppure} \qquad A \xrightarrow{f} B,$$

mentre volendo evidenziare gli elementi

$$f : x \longrightarrow y \qquad \text{oppure} \qquad x \xrightarrow{f} y.$$

Esempio 2.1. *Sia $f : A \longrightarrow A$ definita mediante la equazione $y = x$. Questa applicazione che associa ad ogni elemento l'elemento stesso $f : x \longrightarrow x$ viene detta "applicazione identica in A".*

Esempio 2.2. *Sia $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}^+$ e $f : x \longrightarrow x^2$. Il grafico di questa funzione risulta essere la parabola passante per l'origine avente asse coincidente con quello delle ordinate.*

Esempio 2.3. *Se $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e pure $B = \mathbb{R}$ allora la relazione che associa alla coppia (x,y) il numero $x+y$ è una funzione detta "funzione somma" o "operazione somma". La scrittura $f : (x,y) \longrightarrow z = x + y$ mette in evidenza l'esistenza di funzioni aventi più variabili indipendenti.*

Esercizio 2.6. *Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definita dalle*

$$f : \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{se } x < -1 \veebar x > 1. \end{cases}$$

Determinare il grafico. (Per risolvere l'esercizio è necessaria la conoscenza della geometria analitica della circonferenza)

Esercizio 2.7. *Si dica se le funzioni definite dalle*

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad \text{con} \quad x \in \mathbb{R} - \{2\}$$
$$g(x) = x + 2 \qquad x \in \mathbb{R}$$

rappresentano la medesima funzione ossia $f = g$. Si ricordi che la precedente uguaglianza implica che le coppie ordinate dell'insieme f siano le stesse dell'insieme g.

2.4 Classificazione delle funzioni

Come già fatto notare, la definizione di funzione lascia aperte due possibilità per il codominio:

- $f(A) \subset B$ ossia che il codominio sia un sottoinsieme proprio di B,
- $f(A) = B$ e quindi il codominio coincida con B.

Le funzioni che seguono la seconda possibilità soddisfano alla seguente definizione:

Definizione 2.13. *La funzione $f : A \longrightarrow B$ è suriettiva $\Longleftrightarrow f(A) = B$ ossia*

$$\forall\, y \in B,\ \exists\, x \in A \,|\, y = f(x).$$

Esercizio 2.8. *Dimostrare che la funzione dell'esempio 2.2 risulta suriettiva. Se invece $B = \mathbb{R}$ allora non soddisfa più alla definizione precedente.*

Esercizio 2.9. *È assegnata la funzione "segno di x (sgn(x))" definita dalle*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \{-1\,,0\,,1\} \qquad e \qquad \mathrm{sgn(x)} : \begin{cases} 1, & se\ x > 0 \\ 0, & se\ x = 0, \\ -1, & se\ x < 0 \end{cases}$$

Considerando l'insieme $B = \{-1\,,0\,,1\}$ allora è suriettiva. Se invece $B = \mathbb{R}$ perde questa caratteristica. Se ne determini il grafico.

Esercizio 2.10. *Sia*

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

l'equazione rappresentativa della funzione $f : \mathbb{R}^+ - \{1\} \longrightarrow B$ con $B = \{y \,|\, y \geq 1\}$. Dimostrare che non è suriettiva. Determinare quindi il codominio.

Esercizio 2.11. *Se $f : \mathbb{R}_0 \longrightarrow \mathbb{R}_0$ e $y = 1/x$, allora è suriettiva. Non lo è se $B = \mathbb{R}$.*

D'altra parte vi possono essere funzioni che ad elementi distinti di A fanno corrispondere lo stesso elemento in B (esempio $y = x^2$) così come altre associano ad elementi distinti, elementi distinti di B. Queste ultime funzioni occupano un'importanza particolare e soddisfano alla seguente definizione.

Definizione 2.14. *La funzione $f : A \longrightarrow B$ è iniettiva se trasforma elementi distinti in elementi distinti ossia*

$$f\ \ iniettiva \Longleftrightarrow \forall\, x_1,\ \forall\, x_2\ \wedge\ x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Una affermazione del tutto equivalente alla precedente consiste nella proposizione $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$ che evidenzia come immagini coincidenti in B provengano da elementi coincidenti in A. Questa rappresenta dal punto di vista logico la *contronominale* della definizione 2.14. Allora per provare che una funzione è iniettiva, occorre dimostrare che per $\forall$ coppia di elementi distinti $x_1 \neq x_2$ si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$ o alternativamente che $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$. Per dimostrare invece che f non è iniettiva basta determinare una sola coppia x_1, x_2 di elementi distinti per cui si ha $f(x_1) = f(x_2)$.

Infine se una f risulta sia suriettiva che iniettiva si dirà

DEFINIZIONE 2.15. *La funzione $f : A \longrightarrow B$ è biiettiva o biunivoca se è suriettiva e iniettiva.*

ESEMPIO 2.4. *$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $y = 3x + 1$ risulta sia suriettiva che iniettiva.*

ESERCIZIO 2.12. *La funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^+$ espressa dalla $y = |x|$ (funzione valore assoluto) non è iniettiva ma suriettiva. Determinarne il grafico.*

ESERCIZIO 2.13.

$$f : \begin{cases} x^2 + 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 1 - x^2, & \text{se } x < 0, \end{cases} \qquad \text{è biiettiva.}$$

Dimostrarlo.

ESERCIZIO 2.14. *Dimostrare che la funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ data da $y = x^3 + 4$ è biiettiva.*

ESERCIZIO 2.15. *Dimostrare che la funzione dell'esercizio 2.11 è iniettiva e quindi biunivoca.*

2.5 Funzione inversa

Data una relazione $\mathcal{R}$ abbiamo detto che risulta sempre definita un'altra relazione $\mathcal{R}^{-1}$ detta relazione inversa. Questa osservazione non può estendersi nel caso delle funzioni in quanto se, per definizione, ad ogni elemento x del dominio corrisponde una sola immagine $f(x)$ del codominio, ad un elemento del codominio possono corrispondere più elementi del dominio. Esiste pertanto la relazione inversa, ma questa in generale non è una funzione.

Difatti nell'esercizio 2.12, fissato un valore positivo y allora l'equazione $y = |x|$ fa corrispondere *due* valori di $x \in \mathbb{R}$, $x = \pm y$, eventualità questa che impedisce di definire una funzione inversa.

D'altra parte, se la funzione f risulta iniettiva, il codominio $f(A)$ è un sottoinsieme di B e pertanto per $\forall\, y \in f(A)$, $\exists!\, x \in A \,|\, y = f(x)$. Questo fatto permette di definire una funzione $f^{-1} : f(A) \longrightarrow A$ oppure $f^{-1} : y \longrightarrow x$ che associa elementi di $f(A)$ ad elementi di A. Se poi la funzione f è anche suriettiva (e quindi biunivoca) allora $f(A) = B$ e per $\forall\, y \in B\,, \exists!\, x \in A \,|\, y = f(x)$. In tal caso la f si dice *invertibile* e la f^{-1} rappresenta la *funzione inversa*, ed è a sua volta una biiezione.

In definitiva

Teorema 2.1. *Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza della funzione inversa di f, è che f sia una biiezione.*[2]

L'elemento $x \in A$ che è immagine di y lo si indica come $x = f^{-1}(y)$. I grafici che definiscono le funzioni sono pertanto

$$\begin{aligned} f &= \{(x, y) \,|\, x \in A \,\wedge\, y \in B \,\wedge\, y = f(x)\} \\ f^{-1} &= \{(y, x) \,|\, x \in A \,\wedge\, y \in B \,\wedge\, x = f^{-1}(y)\} \end{aligned}$$

cioè $(x, y) \in f \iff (y, x) \in f^{-1}$. Ne segue che se f è una funzione biiettiva di variabile reale, il grafico dell'inversa f^{-1} si ottiene riportando sull'asse orizzontale di un sistema cartesiano (generalmente associato alla variabile indipendente) la variabile y ossia, come vedremo nel capitolo 3 dove verrà formalizzato tale scambio, considerando il simmetrico del grafico di f rispetto alla retta $y = x$.

In generale, quando è data esplicitamente l'equazione rappresentativa $y = f(x)$ della f, la ricerca dell'equazione rappresentativa di f^{-1} si riduce alla risoluzione in x di $y = f(x)$.

Esempio 2.5. *La funzione inversa di quella definita nel precedente esempio 2.4 risulta $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ed è tale che*

$$f^{-1} : y \longrightarrow x = \frac{y-1}{3}.$$

Esempio 2.6. *La funzione $y = \sqrt{x}$ di $\mathbb{R}^+$ in $\mathbb{R}^+$ è iniettiva e suriettiva. La sua inversa risulta $x = y^2$.*

Esercizio 2.16. *Dimostrare che l'inversa della*

$$f : \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2, & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad \text{è} \qquad f^{-1} : \begin{cases} y, & \text{se } y \geq 0 \\ -\sqrt{-y}, & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

Esercizio 2.17. *Dimostrare che la funzione di $\{x \,|\, x < -1 \veebar x \geq 0\}$ in $\mathbb{R}^+ - \{1\}$ rappresentata dall'equazione*

$$y = \sqrt{\frac{x}{x+1}} \qquad \text{è invertibile.}$$

La sua inversa risulta $x = y^2/(1 - y^2)$.

[2] Spesso si considera già la funzione $f^{-1} : f(A) \to A$ come l'inversa di f. In tal caso la condizione necessaria e sufficiente è la iniettività di f.

2.6 Funzione composta

Consideriamo le due funzioni

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \text{ definita dalla } y = |x+1|$$
$$g : \{x \mid x \geq -2\} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \text{ espressa da } y = \sqrt{x+2}.$$

La prima possiede per codominio $\mathbb{R}^+$ avente intersezione non vuota con il dominio della seconda, cioè $\mathbb{R}^+ \cap \{x \mid x \geq -2\} \neq \varnothing$. Allora si può pensare di applicare inizialmente f agli elementi di $\mathbb{R}$ ottenendo i corrispondenti $y = f(x) \in \mathbb{R}^+$. Successivamente agli elementi $f(x)$ che appartengono anche al dominio di g (e ve ne sono data l'intersezione non vuota) si applica la g ottenendo i corrispondenti $z = g[f(x)]$. Abbiamo in tal modo instaurato una corrispondenza che associa elementi x ad elementi $g[f(x)]$.

Generalizzando siano

$$f : A \longrightarrow B \qquad g : C \longrightarrow D$$

due funzioni che soddisfano alla $f(A) \cap C \neq \varnothing$. È allora possibile determinare un sottoinsieme X di A contenente quelli elementi x tali che $f(x) \in C$ ossia

$$X = \{x \in A \mid f(x) \in C\}.$$

In tal caso la successiva applicazione delle funzioni f e g costituisce a sua volta una funzione di dominio X e a valori in D, che associa ad elementi x le immagini $z = g[f(x)]$. Tale funzione viene detta *funzione prodotto* o *funzione composta di f e g*, si indica con il simbolo $g \circ f$, possiede il dominio X ed è tale che

$$g \circ f : X \longrightarrow D.$$

Le coppie ordinate che costituiscono la $g \circ f$ cioè $(x, g[f(x)])$, si determinano applicando prima la f che fornisce l'immagine $f(x)$ e quindi a quest'ultima va applicata la g ottenendo $z = g[f(x)] = (g \circ f)(x)$. In definitiva si ha

Definizione 2.16. *La funzione composta di f e g è la funzione $g \circ f = \{(x, g[f(x)]) \mid x \in X\}$.*

Quanto delineato sopra si può interpretare come la definizione di una nuova operazione, operazione che associa a due funzioni una terza funzione. A questa ci si riferisce quando si parla di *composizione di due funzioni.*

Esempio 2.7. *L'espressione analitica di $g \circ f$ con le posizioni delineate all'inizio del paragrafo è $z = \sqrt{y+2} = \sqrt{|x+1|+2}$. Il dominio coincide con $\mathbb{R}$ in quanto $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ \subset \{x \mid x \geq -2\}$. Questo fatto è generale: quando $f(A) \subset C$ allora il dominio di $g \circ f$ è A stesso.*

Esempio 2.8. *Sia f con $y = x + 5$ e g definita da $y = 1/(2 - x)$. Allora*

$$g \circ f : x \longrightarrow \frac{1}{2 - (x + 5)} \qquad \text{e} \qquad X = \{x \mid x \neq -3\}.$$

Difatti se fosse $x = -3$, l'elemento $f(-3) = 2 \notin \mathbb{R} - \{2\}$, insieme quest'ultimo che costituisce il dominio di g.

Esercizio 2.18. *Determinare il dominio in $\mathbb{R}$ delle funzioni $g \circ f$ e $f \circ g$ essendo*

$$f : x \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x + 1}} \qquad g : x \longrightarrow x^2.$$

L'operazione di composizione è commutativa?

Esercizio 2.19. *Si verifichi con degli esempi che la composizione tra funzioni è associativa.*

Un interessante risultato si ottiene componendo una funzione con la propria inversa. Sia quindi f una funzione biiettiva e f^{-1} la sua inversa e

$$f : A \longrightarrow B \qquad f^{-1} : B \longrightarrow A.$$

La funzione $f^{-1} \circ f$ implica prima l'applicazione di $f : x \longrightarrow y$ e quindi di f^{-1}. Quest'ultima fa corrispondere all'elemento y il medesimo x cioè $f^{-1} : y \longrightarrow x$. Allora

$$f^{-1} \circ f : x \longrightarrow x \qquad \text{e} \qquad f^{-1} \circ f : A \longrightarrow A.$$

In altri termini, $\forall\, x \in A$, $f^{-1}[f(x)] = x$ per cui questa funzione composta si riduce alla funzione identità in A ossia $f^{-1} \circ f = I_A$.

Analogamente poiché in $f \circ f^{-1}$ va applicata prima la f^{-1} si ha

$$y \xrightarrow{f^{-1}} x \xrightarrow{f} y,$$

e quindi $\forall y \in B$, $f[f^{-1}(y)] = y$, ossia $f \circ f^{-1} = I_B$ e questa costituisce la funzione identità nell'insieme B.

Esempio 2.9. *Dagli esempi 2.4 e 2.5 discende che a $f^{-1}[f(x)] = x$ corrisponde*

$$x = \frac{y - 1}{3} = \frac{(3x + 1) - 1}{3},$$

mentre la $f[f^{-1}(y)] = y$ equivale alla

$$y = 3x + 1 = 3\left(\frac{y - 1}{3}\right) + 1.$$

Esempio 2.10. *Riprendendo la funzione dell'esercizio 2.17 e la sua inversa e tenendo presenti il dominio e il codominio risulta:*

$$x = f^{-1}[f(x)] = \frac{\left[\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}\right]^2}{\left[1 - \left(\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}\right)^2\right]}$$

$$y = f[f^{-1}(y)] = \sqrt{\frac{\left(\dfrac{y^2}{1-y^2}\right)}{\left(\dfrac{y^2}{1-y^2} + 1\right)}}.$$

2.7 Funzioni monotòne

Sia assegnata una funzione $f : A \longrightarrow B$ e gli insiemi A e B siano ordinati ossia sia definita su di essi una relazione d'ordine simbolizzata da $\geq$ per un ordine largo o da $>$ per l'ordine stretto.[3]

Sia, per esempio, Γ il grafico rappresentativo di f, funzione reale di variabile reale. Allora, come appare evidente dalla figura, all'aumentare delle x aumenta pure il valore $f(x)$ delle ordinate. Inversamente può succedere che all'aumentare delle x le ordinate dei punti $(x, f(x))$ diminuiscano.

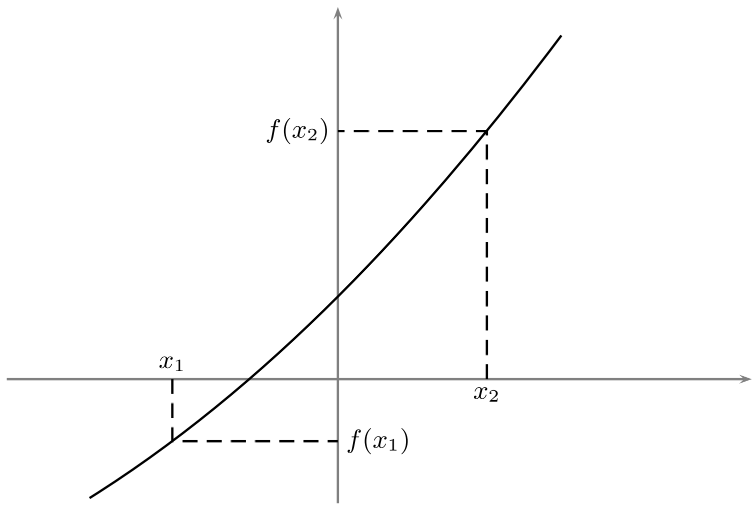


Fig. 2.1. Funzione monotòna crescente.

[3] Si ricordi la definizione 2.10 a p. 10.

Pertanto per distinguere i due diversi andamenti si danno alcune importanti definizioni:

DEFINIZIONE 2.17. *Una funzione $f : A \longrightarrow B$ è monotòna strettamente crescente in A, se*

$$\forall\, x_1 \in A,\ x_2 \in A, \quad x_2 > x_1 \Longrightarrow f(x_2) > f(x_1).$$

DEFINIZIONE 2.18. *Una funzione $f : A \longrightarrow B$ è monotòna strettamente decrescente in A, se*

$$\forall\, x_1 \in A,\ x_2 \in A, \quad x_2 > x_1 \Longrightarrow f(x_2) < f(x_1).$$

Se invece la relazione che risulta soddisfatta è di ordine largo, discendono le analoghe:

DEFINIZIONE 2.19. *Una funzione $f : A \longrightarrow B$ è monotòna crescente in A, se*

$$\forall\, x_1 \in A,\ x_2 \in A, \quad x_2 > x_1 \Longrightarrow f(x_2) \geq f(x_1).$$

DEFINIZIONE 2.20. *Una funzione $f : A \longrightarrow B$ è monotòna decrescente in A, se*

$$\forall\, x_1 \in A,\ x_2 \in A, \quad x_2 > x_1 \Longrightarrow f(x_2) \leq f(x_1).$$

Complessivamente le funzioni crescenti e decrescenti sono quindi individuate dalla loro monotonìa.

ESEMPIO 2.11. *Dimostriamo che la funzione descritta dall'equazione $y = 1/x$ è monotòna decrescente in senso stretto in $\mathbb{R}_0^+ \veebar \mathbb{R}_0^-$. Difatti dalla $x_2 > x_1$, dividendo per $x_1 x_2 > 0$ (x_1 e x_2 sono contemporaneamente concordi) discende la*

$$\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \qquad \textit{ossia} \qquad f(x_2) < f(x_1).$$

ESERCIZIO 2.20. *Dimostrare che la funzione rappresentata dall'equazione $y = x^3$ è monotòna strettamente crescente in tutto $\mathbb{R}$.*

ESERCIZIO 2.21. *Determinare quei sottoinsiemi del dominio della funzione di equazione*

$$y = \frac{x+2}{x+7},$$

dove questa risulta strettamente monotòna.

Esercizio 2.22. *Dimostrare che l'equazione* $y = 1/\sqrt{x+2}$ *determina una funzione monotòna decrescente nel proprio dominio.*

Chiaramente una funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sia monotòna in senso stretto risulta pure iniettiva. Difatti se

$$x_1,\ x_2 \in A \quad \text{e} \quad x_1 \neq x_2$$

allora dev'essere

$$x_1 > x_2 \quad \veebar \quad x_1 < x_2.$$

D'altra parte la monotonìa implica che sia

$$f(x_1) > f(x_2) \quad \veebar \quad f(x_1) < f(x_2)$$

ossia $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Il viceversa non è comunque vero. Difatti, riprendendo l'esempio 2.11, se è

$$f : x \in \mathbb{R}_0 \longrightarrow \mathbb{R}_0 \quad \text{con} \quad y = \frac{1}{x},$$

si ha che per $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$, da $x_1 < x_2$ non segue, come dimostrato in 2.11, $f(x_1) > f(x_2)$. Pertanto in $\mathbb{R}$ la funzione f definita sopra non è monotòna.

Esercizio 2.23. *La funzione* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *è strettamente crescente, mentre* $g : A \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *risulta strettamente decrescente. Dimostrare che la funzione rapporto* $h(x) = f(x)/g(x)$ *risulta strettamente crescente in* A.

Esercizio 2.24. *Dimostrare che la somma di due funzioni* f *e* g*, definite nello stesso dominio* A *e ivi monotòne strettamente crescenti (o rispettivamente decrescenti), risulta essere una funzione avente il medesimo carattere di monotonìa. Si delineino le proprietà di* f *e* g *nel caso che si voglia studiare la monotonìa di* $f - g$.

Per le funzione biunivoche e monotòne possiamo dimostrare un notevole teorema che coinvolge una funzione f e la propria inversa. Questo teorema ci permetterà in futuro di estendere le proprietà di monotonìa di importanti funzioni anche alle rispettive inverse.

Teorema 2.2. *Se* $f : A \longrightarrow B$ *è una funzione biunivoca monotòna strettamente crescente (decrescente) in* A*, allora la funzione inversa* f^{-1} *è pure monotòna strettamente crescente (decrescente) in* B.

Dimostrazione: *Considerati due elementi distinti di* B *cioè* $y_1, y_2 \in B$ *allora si può avere una sola delle possibilità* $y_2 < y_1 \veebar y_2 > y_1$. *Sia per ipotesi* $y_2 > y_1$. *Dalla biunivocità di* f *discende che* y_1, y_2 *siano le immagini di due elementi distinti del dominio* x_1 *e* x_2*, ossia* $y_1 = f(x_1)$ *e* $y_2 = f(x_2)$ *o anche* $x_1 = f^{-1}(y_1)$ *e* $x_2 = f^{-1}(y_2)$.

Si tratta di dimostrare che $y_2 > y_1 \Longrightarrow f^{-1}(y_2) > f^{-1}(y_1)$. *Ragionando per assurdo supponiamo, negando la tesi,* $x_2 \leq x_1$. *Data la crescenza di* f *discende* $f(x_2) \leq f(x_1)$ *cioè, per le posizioni sopra* $y_2 \leq y_1$, *in contraddizione con l'ipotesi* $y_2 > y_1$. *Pertanto dev'essere* $x_2 > x_1$ *e quindi*

$$y_2 > y_1 \iff x_2 > x_1 \quad \text{ossia} \quad y_2 > y_1 \iff f^{-1}(y_2) > f^{-1}(y_1).$$

Del tutto analoga risulta la dimostrazione se la f *è decrescente.*

Diamo infine un'ultima definizione, che verrà spesso utilizzata in seguito. Sia $f : A \longrightarrow B$ una funzione di equazione $y = f(x)$ e si abbia $C \subset A$. Allora la funzione rappresentata dalla medesima equazione ma di dominio C si dice *restrizione di* f *in* C. In definitiva:

Definizione 2.21. *Sia* $f : A \longrightarrow B$ *e* $f : x \longrightarrow f(x)$. *Se* $C \subset A$ *allora*

$$h \text{ restrizione di } f \text{ in } C \iff h : C \longrightarrow B \quad h : x \longrightarrow f(x).$$

2.8 Intervalli

Risulta utile esprimere alcuni insiemi con una notazione alternativa a quella presentata nel I capitolo.

Definiamo pertanto dei particolari sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ detti *intervalli*.

Definizione 2.22. *Dicesi intervallo limitato* I *di estremi* a *e* b *il sottoinsieme di* $\mathbb{R}$ *tale che*

$$I = \{x \mid a \leq x \leq b \ \wedge \ a \leq b\}.$$

A seconda che si comprendano o meno gli estremi si possono presentare le possibilità seguenti:

Definizione 2.23. *Intervallo chiuso di estremi* a *e* b, *se*

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}.$$

Definizione 2.24. *Intervallo semiaperto superiormente se*

$$[a, b[= \{x \mid a \leq x < b\}.$$

Definizione 2.25. *Intervallo semiaperto inferiormente se*

$$]a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}.$$

Definizione 2.26. *Intervallo aperto se*

$$]a, b[= \{x \mid a < x < b\}.$$

Ovviamente questi insiemi descrivono sulla retta reale dei segmenti eventualmente privati di uno o entrambi gli estremi. Per questi ultimi la notazione associata è rispettivamente $[AB]$, $[AB[$, $]AB]$, $]AB[$.

Tra gli intervalli illimitati si comprendono i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ e che corrispondono alle semirette private o meno dell'origine.

Definizione 2.27. *Intervallo illimitato superiormente e chiuso inferiormente* $[a, +\infty[= \{x \mid x \geq a\}$.

Definizione 2.28. *Intervallo illimitato superiormente e aperto inferiormente* $]a, +\infty[= \{x \mid x > a\}$.

Definizione 2.29. *Intervallo illimitato inferiormente e chiuso superiormente* $]-\infty, a] = \{x \mid x \leq a\}$.

Definizione 2.30. *Intervallo illimitato inferiormente e aperto superiormente* $]-\infty, a[= \{x \mid x < a\}$.

Coerentemente a tali notazioni la retta reale si può esprimere come $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

Esercizio 2.25. *Proporre delle notazioni alternative per* $\mathbb{R}_0^+$, $\mathbb{R}_0^-$, $\mathbb{R}^-$, $\mathbb{R}^+$.

CAPITOLO 3

3.1 Generalità sulle trasformazioni lineari

È noto dalla geometria elementare che a certi insiemi di punti si possono far corrispondere con particolari *trasformazioni geometriche* altri insiemi di punti del piano. In quell'ambito si sono affrontate particolari isometrie come per esempio, le traslazioni, le simmetrie assiali e centrali e le rotazioni.

In questo capitolo vogliamo riprendere questi concetti geometrici e, alla luce di quanto svolto finora, derivare delle espressioni analitiche almeno per le trasformazioni del piano in sé che si incontrano più spesso. Affronteremo quindi principalmente le isometrie escludendo le rotazioni in quanto per queste ultime risultano necessarie le funzioni goniometriche non ancora note. Contemporaneamente verranno definite alcune delle proprietà che si ritrovano più spesso nello sviluppo successivo dello studio delle funzioni e in particolare si cercherà di evidenziare come una funzione e il suo grafico, vengano modificati dalla applicazione di tali trasformazioni. Come detto nell'introduzione, per la comprensione di tale capitolo sarà quindi necessario disporre delle normali conoscenze di geometria analitica su rette e coniche.

Siano per esempio, assegnate le due equazioni di I grado

$$\begin{cases} x' = 3x + y - 1 \\ y' = -2x + 1. \end{cases}$$

Se interpretiamo le incognite x e y come la coppia (x, y) rappresentativa del punto P appartenente ad un piano cartesiano ortogonale xOy ossia $P(x, y)$ allora le due equazioni permettono di associare ad *ogni* punto P del piano, un punto P', e uno solo, dello stesso piano e avente coordinate (x', y').

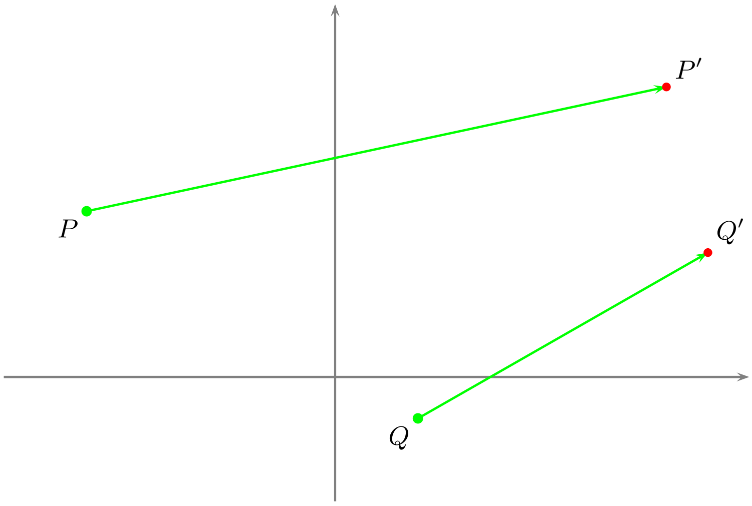


Fig. 3.1. Corrispondenza tra punti dello stesso piano.

Rimane in tal modo definita una *funzione (applicazione)* f *dell'insieme* $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ *su sé stesso* che trasforma un punto P in un punto P' cioè

$$f : P \longrightarrow P' \quad \text{oppure} \quad f : (x, y) \longrightarrow (x', y') \quad \text{o anche} \quad P' = f(P).$$

Coerentemente con quanto esposto nei capitoli precedenti, P' risulta essere l'immagine di P nella trasformazione f o, come si usa dire in questo contesto, il *trasformato di* P. Le equazioni sopra costituiscono la rappresentazione analitica della trasformazione f e per questo vengono dette le *equazioni rappresentative della trasformazione.*

In generale allora una trasformazione f verrà rappresentata tramite la coppia di equazioni in due variabili

$$f : \begin{cases} x' = g(x, y) \\ y' = h(x, y) \end{cases}$$

dove $g(x, y)$ e $h(x, y)$ sono delle funzioni definite in $\mathbb{R}^2$. Poiché ci limiteremo a quelle trasformazioni dove la g e la h sono funzioni lineari e quindi di I grado nelle variabili x e y, le trasformazioni associate sono pure dette *trasformazioni lineari* o *affinità*. Per queste ultime, le coordinate del punto trasformato sono quindi espresse dalle

$$f : \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = dx + ey + f. \end{cases} \tag{3.1}$$

Inversamente, definita tramite le (3.1) la trasformazione f ci si può chiedere sotto quali condizioni sia possibile associare a $P'(x', y')$ un punto $P(x, y)$ ossia determinare la trasformazione inversa f^{-1} tale che

$$f^{-1} : P' \longrightarrow P.$$

A tal fine conviene evidenziare che ciò equivale alla risoluzione del sistema (3.1) nelle incognite x e y cioè nel determinare la soluzione di

$$\begin{cases} ax + by = x' - c \\ dx + ey = y' - f. \end{cases} \tag{3.2}$$

Ricordando la teoria risolutiva dei sistemi di I grado (in particolare il metodo di Cramer), perché questo sistema abbia soluzione, dev'essere

$$\Delta = ae - bd = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \neq 0,$$

ossia il determinante Δ dei coefficienti non è nullo. Solo in tale ipotesi la soluzione del sistema (3.2) *esiste ed è unica*, f possiede l'inversa f^{-1}

$$f^{-1} : \begin{cases} x = a'x' + b'y' + c' \\ y = d'x' + e'y' + f' \end{cases} \tag{3.3}$$

e le equazioni (3.1) rappresentano una corrispondenza biunivoca del piano in sé. In ciò che segue considereremo quindi sempre soddisfatta la condizione di invertibilità del sistema cioè non verranno prese in considerazioni quelle trasformazioni singolari dove $\Delta = 0$.

Infine, a seguito della definizione di trasformazione ossia come una funzione di $\mathbb{R}^2$ su sé stesso, possiamo pensare di comporre più trasformazioni e quindi di definire una *trasformazione composta*. Allora se sono date le trasformazioni s e t tali che

$$s : P \longrightarrow P' \qquad\qquad t : P' \longrightarrow P'',$$

la trasformazione che si ottiene applicando la s e, in successione la t farà corrispondere P'' a P. La

$$t \circ s : P \longrightarrow P''$$

viene detta quindi *trasformazione composta*.

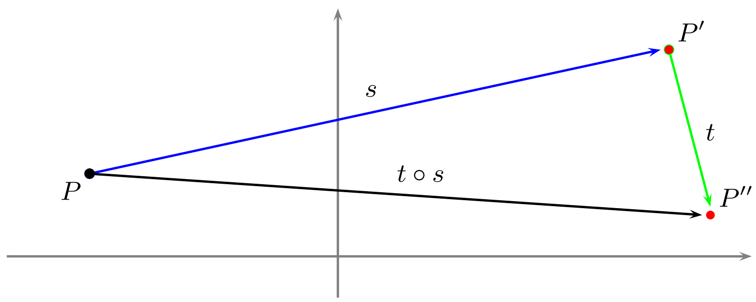


Fig. 3.2. Rappresentazione grafica di una trasformazione composta.

3.2 Una simmetria assiale particolare

Prima di proporre delle definizioni generali, affrontiamo un caso particolare delle (3.1). Si abbia quindi la coppia di equazioni

$$\sigma_x : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \tag{3.4}$$

e cerchiamone il significato geometrico analizzando i punti che queste equazioni fanno corrispondere.

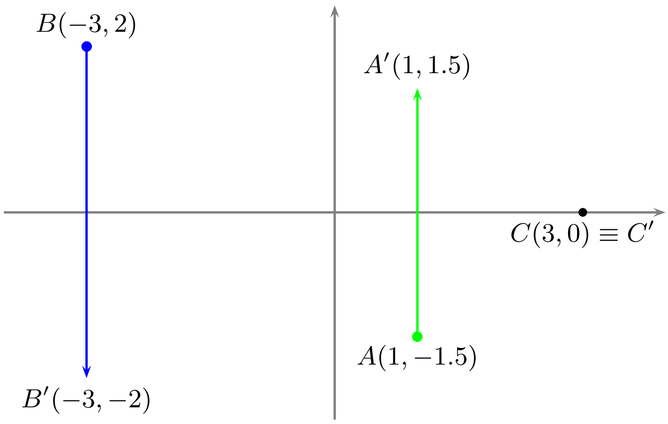


Fig. 3.3. Simmetria assiale di asse x.

Osservando la figura è immediato notare come al punto $A(1,-1{,}5)$ corrisponda tramite le (3.4) il punto $A'(1,1{,}5)$, a $B(-3,2)$ corrisponde $B'(-3,-2)$ e infine il trasformato di $C(3,0)$ è $C'(3,0) \equiv C$. Se consideriamo anziché singoli punti, un insieme di punti per esempio, l'insieme dei punti appartenenti alla retta di equazione $y = 4$, l'immagine[4] tramite σ_x risulta essere la retta di equazione $y' = -4$.

In base a questi esempi e alla nozione di simmetria acquisita nella geometria elementare, possiamo concludere che le equazioni sopra sono rappresentative di una simmetria assiale di asse $y = 0$.

Per codificare ciò in forma più precisa risulta utile introdurre il concetto di *punto unito* e di immagine di un sottoinsieme Γ di punti del piano cartesiano.

Sia quindi f una generica trasformazione lineare tale che $f : P \longrightarrow P'$. Diremo che

[4] Per determinarla basta sostituire alla y l'espressione $-y'$ ed esplicitare y'.

Definizione 3.1. *P è unito nella trasformazione $f \iff P' \equiv P$ con $P' = f(P)$.*

Un punto è quindi unito se viene trasformato in sé stesso dalla f. Allora, riprendendo l'esempio iniziale, il punto C è unito in quanto la sua immagine C' è tale da soddisfare la seguente relazione $C' \equiv C$. Volendo invece determinare l'*insieme dei punti uniti* nella simmetria σ_x basta imporre nelle (3.4) che sia $P'(x', y') \equiv P(x, y)$ cioè risolvere il sistema

$$\begin{cases} x = x \\ y = -y. \end{cases}$$

Questo fornisce il luogo caratterizzato da $y = 0$ con $x \in \mathbb{R}$, equazione che rappresenta l'asse delle ascisse. L'asse x è quindi formato da tutti i punti uniti e per questo viene detto l'asse della trasformazione σ_x.

Sia ora Γ un insieme qualsiasi di punti del piano cartesiano (potrebbe essere il grafico di una qualche funzione ma pure un insieme qualsiasi di punti). La trasformazione f associa ai punti di Γ i punti P' appartenenti all'insieme

$$\Gamma' = \{P' \mid P' = f(P) \ \wedge \ P \in \Gamma\},$$

detto l'*immagine di* Γ *tramite* f. Diremo che Γ *è unito rispetto alla trasformazione* f *se la sua immagine* Γ' *coincide con* Γ ossia

Definizione 3.2. *Se $f : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$, Γ è unito $\iff \Gamma' = \Gamma$.*

Si consideri per esempio l'insieme dei punti della retta r di equazione $x = 5$ e quindi caratterizzati dalle coppie $(5, y)$ con $y \in \mathbb{R}$. L'immagine r' di r si ottiene dalle (3.4) che forniscono

$$\begin{cases} x' = 5 \\ y' = -y \end{cases}$$

cioè i punti P', in generale distinti da P, appartengono ancora a r. Pertanto r è una retta unita (così come tutte le rette parallele all'asse delle ordinate).

Va comunque sottolineato che in generale $\Gamma' \neq \Gamma$ e che, come evidenziato sopra, la nozione di insieme unito non implica che i punti di questo insieme siano punti uniti.

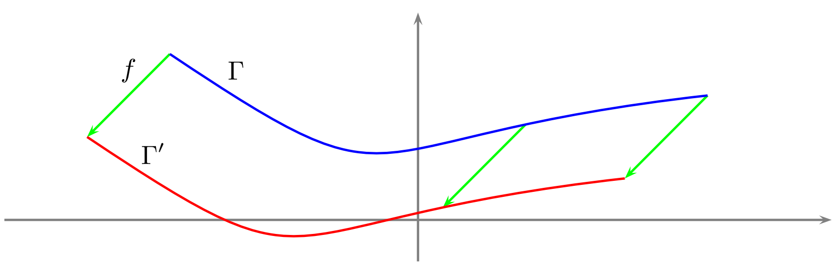


Fig. 3.4. Corrispondenza tramite f tra Γ e Γ'.

ESEMPIO 3.1. *È data la parabola γ di equazione $y = x^2 + 5x$. Detta γ' l'immagine del suo grafico a seguito della applicazione della trasformazione σ_x, vogliamo determinare la sua equazione rappresentativa. A tal fine basta tener presente che nell'equazione che descrive γ le variabili x e y sono pure le coordinate del punto generico $P(x, y)$. Pertanto note le equazioni di σ_x, si deducono le equazioni della sua inversa cioè di σ_x^{-1},*

$$\sigma_x^{-1} : \begin{cases} x = x' \\ y = -y'. \end{cases} \tag{3.5}$$

Sostituite in $y = x^2 + 5x$ forniscono

$$-y' = (x')^2 + 5x' \quad \Longrightarrow \quad y' = -(x')^2 - 5x',$$

che è l'equazione di γ'. Il grafico di γ e γ' è riportato in figura 3.5.

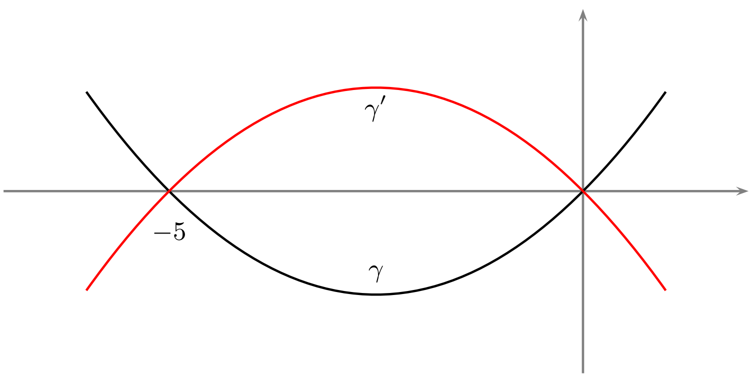


Fig. 3.5. Simmetria assiale di una parabola.

L'esempio appena discusso mette in evidenza il procedimento che in genere va seguito per determinare l'equazione rappresentativa dell'immagine Γ', nota quella dell'insieme Γ.

Difatti se $g(x, y) = 0$ è l'equazione che descrive Γ allora per ottenere l'equazione $g'(x', y') = 0$ di Γ' è sufficiente ricavare le equazioni della trasformazione inversa f^{-1} ossia le (3.3), e sostituirle in $g(x, y) = 0$. L'equazione che ne discende (con tutte le condizioni connesse) esprime il legame che intercorre tra le generiche coordinate x' e y' del punto trasformato cioè è rappresentativa di Γ'.

In particolare per la simmetria σ_x, se l'equazione di Γ è in forma esplicita, per esempio $y = h(x)$, allora tramite le inverse (3.5) discende che $-y' = h(x')$ e $y' = -h(x')$. Questa equazione rappresenta l'immagine Γ', simmetrica rispetto all'asse x.[5]

[5] Volendo mantenere la convenzione che associa a x e a y le coordinate di un punto generico si può riscrivere $y' = -h(x')$ anche come $y = -h(x)$.

Esercizio 3.1. *Sia data una circonferenza di centro (3,1) e raggio 2. Determinare l'equazione rappresentativa della sua simmetrica rispetto all'asse delle x.*

Esercizio 3.2. *Dimostrare che la circonferenza di centro $C(-4, 0)$ e raggio $r = 10$ è una figura unita nella simmetria σ_x.*

Esercizio 3.3. *È data la funzione rappresentata dalle equazioni*

$$h : \begin{cases} x^2 - 3x, & x \geq 3 \\ -(x+5)(x-3) & x < 3. \end{cases}$$

Determinare grafico ed equazioni rappresentative dell'immagine di h tramite σ_x.

Esercizio 3.4. *La funzione $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [1, +\infty[$ possiede una rappresentazione del tipo $y = \sqrt{x} + 1$. Determinare grafico ed equazione rappresentativa della simmetrica rispetto all'asse x.*

3.3 Altre simmetrie assiali

Con osservazioni del tutto analoghe a quelle del precedente paragrafo le equazioni rappresentative di una simmetria assiale di asse y sono

$$\sigma_y : \begin{cases} x' = -x \\ y' = y. \end{cases} \tag{3.6}$$

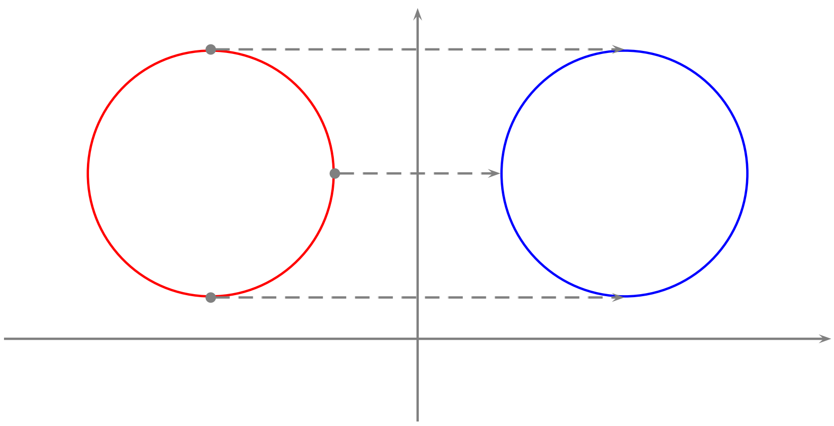


Fig. 3.6. Esempio di simmetria assiale di asse y.

Nel caso che una funzione sia espressa dall'equazione $y = f(x)$, la sua simmetrica secondo σ_y sarà descritta dall'equazione $y' = f(-x')$ (o per quanto detto nella nota di p. 28, $y = f(-x)$). Il grafico Γ di f è pertanto unito se $P'(x', y') \in \Gamma$ cioè $f(-x) = f(x)$. Quest'ultimo caso permette di classificare quelle funzioni che sono invarianti (cioè $\Gamma' = \Gamma$) sotto la trasformazione σ_y ossia

Definizione 3.3. *Una funzione di dominio A dicesi pari se*

$$\forall\, x \in A, \iff f(-x) = f(x).$$

Esempio 3.2. *Il grafico della funzione valore assoluto, di equazione $y = |x|$ espresso dalla figura 7 è evidentemente unito nella simmetria σ_y. Difatti, essendo $f(x) = |x|$ e $f(-x) = |-x|$ risulta pure $|-x| = |x|$.*

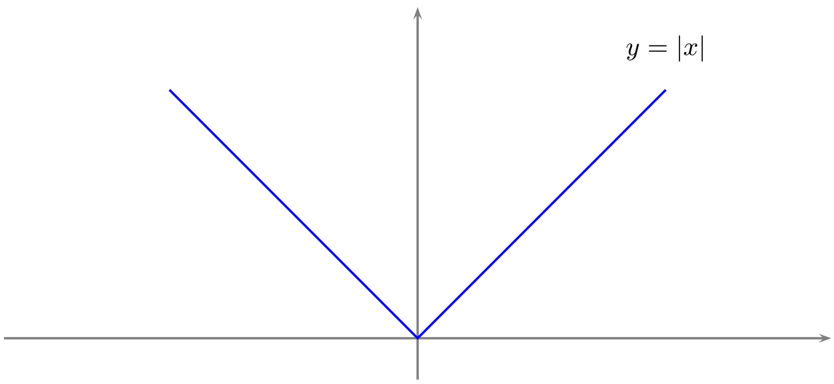


Fig. 3.7. Grafico della funzione valore assoluto.

Esercizio 3.5. *Dimostrare che l'equazione rappresentativa della funzione g,*

$$y = \frac{x^2 - 3}{\sqrt{1 + x^2}}$$

è invariante per trasformazioni σ_y.

Esercizio 3.6. *Determinare il grafico e le equazioni rappresentative della funzione h data dalle*

$$h : \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & x \in [-1, 1] \\ y = x + 1, & x > 1 \\ y = -(x^2 + 2x + 1), & x < -1, \end{cases}$$

e quindi applicare ad essa σ_y, definendo le equazioni rappresentative della trasformata.

Esercizio 3.7. *Dimostrare che i grafici dell'ellisse e dell'iperbole in forma normale sono uniti nelle trasformazioni σ_x e σ_y.*

Conviene ora riprendere la definizione geometrica di simmetria assiale per poterla applicare a casi più generali di quelli finora esposti.

Si dice pertanto che due punti P e P' del piano sono simmetrici rispetto alla generica retta r, se la retta PP' è perpendicolare ad r (asse della simmetria) e il punto medio del segmento $[PP']$ appartiene ad r. Ne segue che prendendo un asse di equazione $y = b$, parallelo all'asse delle ascisse, le coordinate del punto medio M del segmento $[PP']$ dovranno soddisfare alle equazioni

$$\begin{cases} x' = x \\ \dfrac{y' + y}{2} = b \end{cases}$$

in quanto M appartiene all'asse r. Da queste discende

$$\sigma_b : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 2b \end{cases} \tag{3.7}$$

che rappresentano una simmetria assiale di asse $y = b$.

In modo completamente analogo, una simmetria assiale di asse $x = a$ è espressa da

$$\sigma_a : \begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = y. \end{cases} \tag{3.8}$$

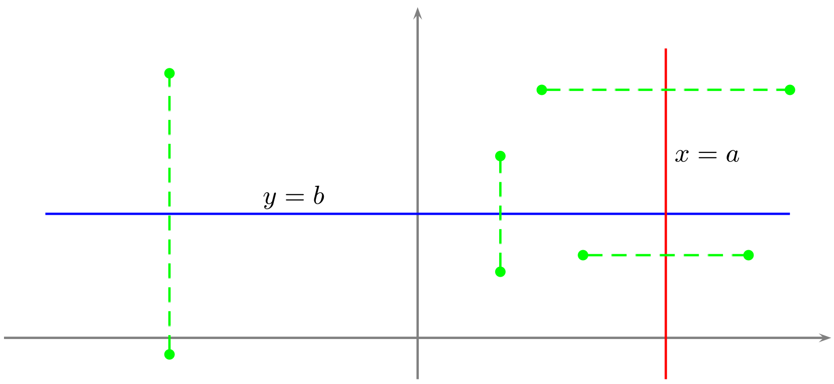


Fig. 3.8. Simmetrie assiali con asse "orizzontale" e "verticale".

È facile infine comprendere, dato il carattere intuitivo dell'osservazione, come l'asse r di una simmetria σ_r sia una retta unita costituita da tutti punti uniti mentre le rette perpendicolari ad r pure unite, non sono un luogo di punti uniti (fa eccezione solo la loro intersezione con r). Inoltre le equazioni scritte si riducono alle (3.4) (3.6) nell'ipotesi che sia $a = 0$ o $b = 0$.

Un altro caso particolarmente importante riguarda la simmetria rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante la cui equazione è $y = x$. Le equazioni che la esprimono si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{y'+y}{2} = \dfrac{x'+x}{2} \\ \dfrac{y'-y}{x'-x} = -1 \end{cases}$$

dove la prima deriva dall'aver imposto l'appartenenza del punto medio M alla retta $y = x$ ($x_M = y_M$) e la seconda esprime la condizione di perpendicolarità della retta PP' rispetto ad r. Si giunge alle

$$\sigma_{y=x} : \begin{cases} x' = y \\ y' = x. \end{cases} \tag{3.9}$$

Ne segue che se la funzione f di grafico Γ è rappresentata da $y = f(x)$ allora $x = f(y)$ è l'equazione che descrive l'immagine Γ' di Γ. D'altra parte, come si può rilevare dall'esempio 3.3 $x = f(y)$ non è in generale l'equazione rappresentativa di una funzione.

Se invece f possiede l'inversa[6] f^{-1}, il grafico di questa lo si ottiene da quello di f attraverso la trasformazione $\sigma_{y=x}$. Difatti nell'equazione rappresentativa della inversa $x = f^{-1}(y)$ la y risulta essere la variabile indipendente e x quella dipendente. Volendo disporre convenzionalmente la prima sull'asse delle ascisse e la seconda su quello delle ordinate va applicata la $\sigma_{y=x}$ ottenendo l'equazione $y = f^{-1}(x)$ rappresentativa ancora di f^{-1} ma che descrive un insieme di punti simmetrico rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.

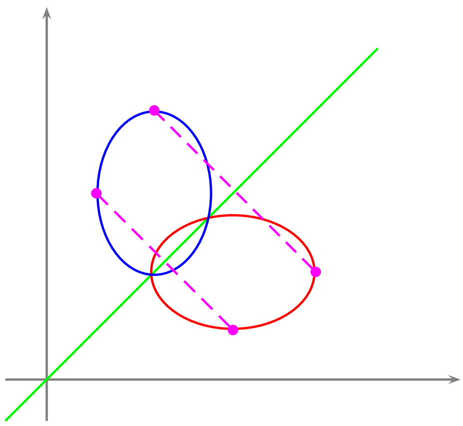


Fig. 3.9. Simmetria relativa alla bisettrice del I e III quadrante.

[6] Si veda anche quanto detto a p. 14.

Esempio 3.3. *La funzione di equazione* $y = \sqrt{2x - x^2}$ *con* $x \in [0, 2]$ *e codominio* $y \in [0, 1]$, *ha per grafico una semicirconferenza* γ *di raggio 1 e centro* $(1, 0)$. *L'immagine di questa dopo l'applicazione di* $\sigma_{y=x}$ *è la semicirconferenza di centro* $(0, 1)$, *raggio 1 e avente* $x \in [0, 1]$ *mentre* $y \in [0, 2]$. *L'equazione trasformata* $x = f(y) = \sqrt{2y - y^2}$ *non è rappresentativa di alcuna funzione in quanto per* $x \in [0, 1[$ *l'equazione fornisce due valori di* y *espressi da* $y_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - x^2}$.

Esercizio 3.8. *Determinare il grafico e l'equazione rappresentativa dell'iperbole equilatera* $xy = 1$ *dopo che a questa si sia applicata la simmetria assiale di asse* $x = -5$. *Qual è il nuovo asintoto verticale?*

Esercizio 3.9. *Dimostrare che una funzione monotona strettamente crescente in un certo intervallo ha per immagine una funzione strettamente decrescente se ad essa si applica una qualsiasi trasformazione del tipo* σ_a *o* σ_b.

Esercizio 3.10. *Dimostrare che la composizione di una simmetria assiale con sé stessa corrisponde alla trasformazione identica* $x' = x \wedge y' = y$. *Questo risultato è generale: ogni simmetria composta con sé stessa si riduce alla trasformazione identica. Per tale motivo si dicono "involuzioni".*

Esercizio 3.11. *Dimostrare che le equazioni della simmetria assiale* σ_r *di asse obliquo* $r : y = mx + q$, *sono date dalle*

$$\sigma_r : \begin{cases} x' = \dfrac{x(1 - m^2) + 2my - 2mq}{1 + m^2} \\ y' = \dfrac{y(m^2 - 1) + 2mx + 2q}{1 + m^2} \end{cases} \tag{3.10}$$

Esercizio 3.12. *Siano* σ_1 *e* σ_2 *due simmetrie definite dalle*

$$\sigma_1 : \begin{cases} x' = -x + 3 \\ y' = y \end{cases} \qquad \sigma_2 : \begin{cases} x' = -x + 5 \\ y' = y. \end{cases}$$

Determinata la $\sigma_2 \circ \sigma_1$ *si dica se questa è una simmetria assiale.*

Esercizio 3.13. *Determinato il grafico associato alla* $f(x) = x^2 + 2x + 2$, *si trovi quello di* $f(|x|) = |x|^2 + 2|x| + 2$, *dopo averne determinato le proprietà di simmetria. Successivamente, supposto noto il grafico di* $y = f(x)$, *e utilizzando la nozione di simmetria rispetto all'asse delle* y, *si dica come si può giungere a conoscere il grafico della* $y = f(|x|)$.

Esercizio 3.14. *Ottenuto il grafico di* $y = -x(x + 2)$ *si deduca quello della parabola simmetrica rispetto all'asse* x. *Quindi utilizzando la conoscenza di entrambi, determinare il grafico di* $y = |-x(x + 2)|$. *Si generalizzi la conclusione deducendo il grafico di* $y = |f(x)|$, *noto quello di* $y = f(x)$.

3.4 Simmetrie centrali

Dalla geometria sappiamo che due punti P e P' sono simmetrici rispetto ad un punto C se C è il punto medio del segmento $[PP']$. Ci proponiamo ora di affrontare quelle biiezioni che associano P a P' secondo la modalità appena descritta cioè le cosiddette *simmetrie centrali di centro* C, σ_C.

Sia quindi $O(0,0)$ l'origine di un sistema cartesiano ortonormale e sia $P(x,y)$ un punto qualsiasi. Il suo simmetrico rispetto ad O, $P(x',y')$ dovrà avere le coordinate tali che il punto medio di $[PP']$ coincida con l'origine. x' e y' devono soddisfare alle equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{x'+x}{2} = 0 \\ \dfrac{y'+y}{2} = 0 \end{cases}$$

dalle quali discendono le

$$\sigma_O : \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y, \end{cases} \tag{3.11}$$

rappresentative della simmetria σ_O.

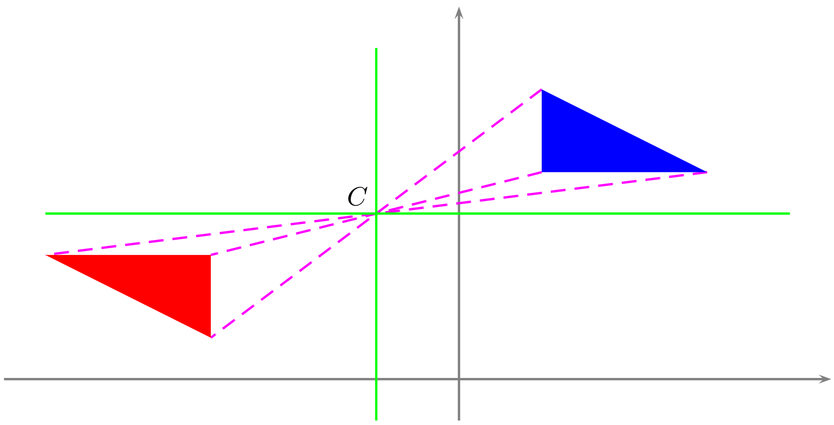


Fig. 3.10. Simmetria centrale di centro C.

Se quindi $y = f(x)$ rappresenta la funzione f ne segue che $-y' = f(-x')$ ossia

$$y' = -f(-x') \tag{3.12}$$

è l'equazione che descrive il legame tra le coordinate del punto trasformato $P'(x',y')$ cioè è rappresentativa di Γ'.

Nel caso che sia $\Gamma' = \Gamma$ e quindi che Γ sia un insieme unito, le coordinate della generica immagine P' dovranno soddisfare anche all'equazione $y = f(x)$ cioè

$y' = f(x')$. Unita alla (3.12) discende che $-f(-x') = f(x')$ che più spesso si scrive come $f(-x) = -f(x)$. Le funzioni che godono di questa proprietà sono particolarmente importanti per cui si dà la seguente definizione:

DEFINIZIONE 3.4. *La funzione f di dominio A si dice dispari se*

$$\forall\, x \in A, \iff f(-x) = -f(x).$$

Ovviamente il grafico di queste è unito per trasformazioni σ_O.

ESEMPIO 3.4. *L'iperbole equilatera possiede un grafico unito rispetto a σ_O. Difatti il luogo dei punti P' è espresso dalla $-y' = k/(-x')$ cioè dalla $y' = k/x'$ e quest'ultima è anche l'equazione che rappresenta il luogo dei punti P. Detto in altro modo, se $f(x) = k/x$ allora $f(-x) = k/(-x) = -(k/x) = -f(x)$, e quindi l'iperbole equilatera è una funzione dispari.*

ESERCIZIO 3.15. *Si dica se l'equazione $y = x^3$ è rappresentativa di una funzione dispari ossia invariante per simmetria centrale con centro nell'origine.*

ESERCIZIO 3.16. *Dimostrare che la moltiplicazione di*
- a. *una funzione pari con una dispari, fornisce una funzione dispari,*
- b. *due funzioni dispari, è una funzione pari,*
- c. *due funzioni pari, è una funzione pari.*

ESERCIZIO 3.17. *Determinare le equazioni rappresentative della funzione h, immagine di*

$$f : \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$$

e ottenuta applicando a quest'ultima la simmetria σ_O. Si tracci il grafico di entrambe.

Un'ovvia generalizzazione delle (3.11) si ottiene considerando come centro della simmetria un punto qualsiasi di coordinate $C(a, b)$. Allora risolvendo le

$$\begin{cases} \dfrac{x' + x}{2} = a \\ \dfrac{y' + y}{2} = b \end{cases}$$

si giunge alle

$$\sigma_C : \begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = -y + 2b. \end{cases} \tag{3.13}$$

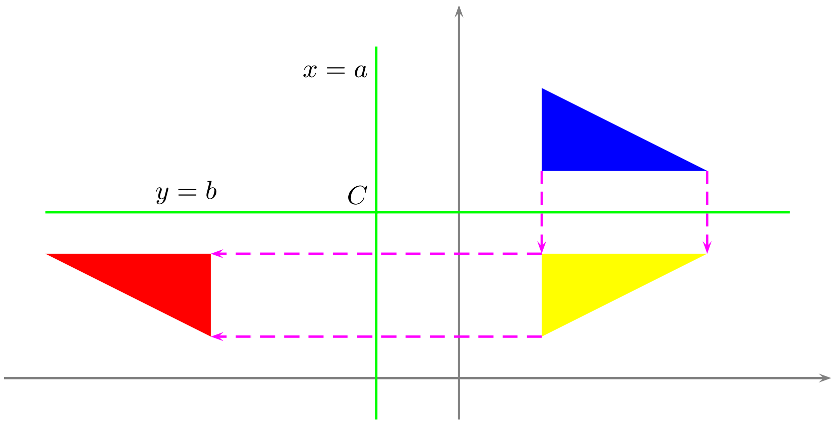


Fig. 3.11. Simmetria centrale come composizione di due simmetrie assiali.

Come si può notare dalla figura 11, la generica simmetria centrale si può ottenere tramite la composizione di due simmetrie assiali, σ_a e σ_b. Difatti, essendo

$$\sigma_a : \begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = y \end{cases} \qquad \sigma_b : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 2b, \end{cases}$$

e poiché ciascuna di queste agisce in modo tale che

$$P(x, y) \xrightarrow{\sigma_a} P'(x', y') \xrightarrow{\sigma_b} P''(x'', y''),$$

risulta

$$\sigma_b \circ \sigma_a : \begin{cases} x'' = x' = -x + 2a \\ y'' = -y' + 2b = -y + 2b \end{cases}$$

che coincidono con le (3.13). In definitiva $\sigma_C = \sigma_b \circ \sigma_a$.

Esercizio 3.18. *Determinare grafico ed equazioni dell'immagine della funzione f proposta nell'esercizio 3.17, se a questa è applicata la simmetria*

$$\begin{cases} x' = -x + 1 \\ y' = -y + 4. \end{cases}$$

Esercizio 3.19. *Dimostrare che se f è una funzione monotòna strettamente crescente (decrescente), la sua immagine f' secondo una generica simmetria centrale possiede il medesimo carattere di monotonìa.*

3.5 Traslazioni

Una traslazione nel piano è una relazione che associa ad un punto P il punto P' tale che i segmenti $[PP']$ abbiano tutti la stessa lunghezza, direzione e verso.

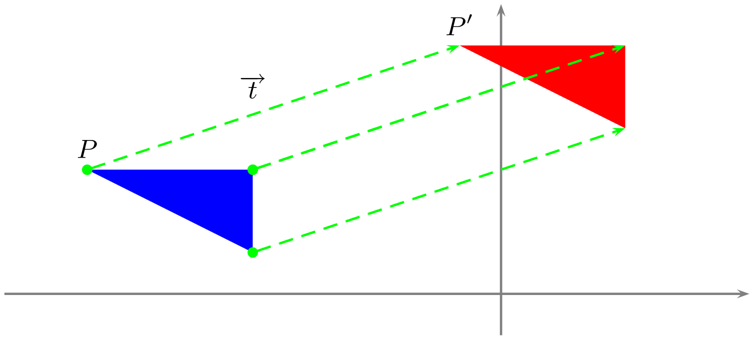


Fig. 3.12. Traslazione $\overrightarrow{t}$.

Come emerge dalla figura 12, una traslazione individua un vettore $\overrightarrow{PP'}$ che è indipendente dalla coppia di punti corrispondenti. Siano quindi $\overrightarrow{PP'} = (a, b) = \overrightarrow{t}$ le componenti del vettore che definisce la traslazione. Allora se $P(x, y)$ è il punto origine, la sua immagine $P'(x', y')$ si ottiene dalle equazioni

$$\tau : \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b, \end{cases} \tag{3.14}$$

espressioni che definiscono analiticamente pure la traslazione τ.

È interessante definire le equazioni della τ^{-1}, inversa di τ. Dalle precedenti discende immediatamente

$$\tau^{-1} : \begin{cases} x = x' - a = x' + (-a) \\ y = y' - b = y' + (-b), \end{cases} \tag{3.15}$$

per cui τ^{-1} è ancora una traslazione ma rappresentata dal vettore di componenti $(-a, -b) = -\overrightarrow{t}$, opposto di $\overrightarrow{t}$.

Esempio 3.5. *Otteniamo le equazioni dell'immagine della parabola di equazione $y = x^2$ nella traslazione*

$$\tau : \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 2. \end{cases}$$

Ricavate le equazioni di τ^{-1} ossia

$$\tau^{-1} : \begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' - 2 \end{cases}$$

e sostituite in $y = x^2$ si ottiene $y' - 2 = (x' - 1)^2$ che implica $y' = (x')^2 - 2x' + 3$. Questa è l'equazione della parabola di vertice $(1, 2)$ con concavità rivolta verso il semiasse positivo delle y.

Data l'importanza delle traslazioni e dei loro effetti sui grafici delle funzioni, conviene approfondire il precedente esempio e definire in termini generali come l'applicazione di una traslazione modifichi le equazioni rappresentative delle funzioni in $\mathbb{R}$.

Sia al solito $y = f(x)$ l'equazione che descrive la funzione f. Applicando ad essa la traslazione τ e quindi utilizzando le equazioni della τ^{-1} discende $y' - b = f(x' - a)$ cioè $y' = f(x' - a) + b$. Quest'ultima rappresenta il luogo dei punti P' ossia descrive l'immagine traslata Γ'.

Spesso comunque risulta utile procedere in modo opposto. Assegnata perciò l'equazione

$$y = f(x - a) + b, \tag{3.16}$$

rappresentativa di una funzione dal grafico incognito, applicando la traslazione τ^{-1} si giunge alla $y' = f(x')$, equazione più semplice e che potrebbe rivelare un grafico Γ' già noto. In tal caso il grafico Γ della equazione originaria è il traslato di Γ' secondo τ.

Esempio 3.6. *È assegnata l'equazione*

$$y = \frac{1}{x+5} + 2 \quad \text{con} \quad x > -5$$

e si vuole ottenere il grafico relativo. Poiché questa non rientra immediatamente nelle conoscenze acquisite di geometria analitica, quali rette, parabole, ellissi e iperboli centrate, cercheremo qualche trasformazione che ci riporti ad equazioni che sappiamo interpretare. Allora riscritta la precedente come

$$y - 2 = \frac{1}{x+5}$$

risulta immediato porre

$$\tau : \begin{cases} x' = x + 5 \\ y' = y - 2 \end{cases}$$

da cui otteniamo l'equazione

$$y' = \frac{1}{x'} \quad \text{con} \quad x' > 0$$

che è rappresentativa di un ramo di iperbole equilatera riferita ai propri asintoti. Il grafico quindi della funzione iniziale (in blu nella fig. 13) si ottiene da quello dell'iperbole (in rosso), applicando a quest'ultimo la traslazione τ^{-1} *di equazioni*

$$\tau^{-1} : \begin{cases} x = x' - 5 \\ y = y' + 2. \end{cases}$$

e vettore $\vec{t} = (-5, 2)$. *Ciò equivale ad una traslazione dell'iperbole nella direzione negativa delle* x *di 5 unità e di 2 unità nella direzione positiva delle* y.

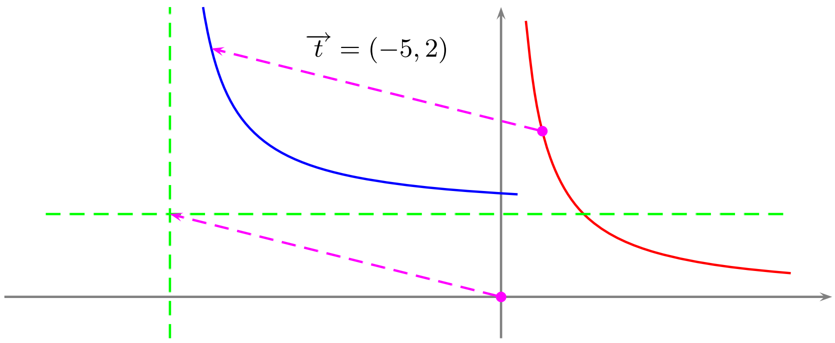


Fig. 3.13. Iperbole traslata.

In generale, se in (3.16) è $a > 0$ allora la curva cercata è traslata nella direzione positiva delle x, mentre avviene il viceversa se $a < 0$. Parallelamente, se $b > 0$, il grafico espresso da (3.16) è traslato nella direzione positiva delle y, viceversa se $b < 0$.

Esercizio 3.20. *Studiato il grafico* Γ *della funzione espressa dalle*

$$g : \begin{cases} \sqrt{x} + 1, & x \geq 0 \\ x^2 + 1, & x < 0 \end{cases}$$

si determinino le traslazioni τ *che associano al punto di ascissa nulla di* g*, un punto di ordinata nulla e tali che* $(0, 1)$ *appartenga alla curva traslata.*

Esercizio 3.21. *Dimostrare che la composizione di due traslazioni di vettori rappresentativi* $\overrightarrow{t} = (a, b)$ *e* $\overrightarrow{v} = (c, d)$ *è ancora una traslazione rappresentata da* $\overrightarrow{u} = (a + c, b + d)$*.*

Esercizio 3.22. *In una traslazione che non sia l'identità vi sono punti uniti?*

Esercizio 3.23. *Dimostrare che una retta* r *è unita in una traslazione solo se la traslazione ha la medesima direzione di* r*.*

Esercizio 3.24. *Se* σ_{x1} *e* σ_{x2} *sono due simmetrie assiali con assi paralleli all'asse* x*, si dica quale trasformazione esprime la loro composizione* $\sigma_{x1} \circ \sigma_{x2}$*. È possibile generalizzare il risultato?*

3.6 La funzione omografica

La funzione f rappresentata dalla forma fratta razionale

$$f : y = \frac{ax + b}{cx + d}. \tag{3.17}$$

viene detta *funzione omografica*. Il suo dominio è evidentemente $D = \mathbb{R} - \{-d/c\}$ e si determina ponendo $cx + d \neq 0$. Generalizzando l'esempio 3.6, intendiamo dimostrare che il grafico Γ di f è il traslato del grafico Γ' di un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti.

A tal fine applichiamo la traslazione di equazioni

$$\tau : \begin{cases} x = x' - \frac{d}{c} \\ y = y' + \frac{a}{c} \end{cases} \tag{3.18}$$

dove evidentemente $c \neq 0$. L'equazione (3.17) diviene

$$y' + \frac{a}{c} = \frac{a\left(x' - \frac{d}{c}\right) + b}{c\left(x' - \frac{d}{c}\right) + d}.$$

Eseguendo i prodotti

$$y' + \frac{a}{c} = \frac{ax' - \frac{ad}{c} + b}{cx' - d + d} \qquad \text{o anche} \qquad y' + \frac{a}{c} = \frac{acx' - ad + bc}{c^2 x'} :$$

esplicitando y' otteniamo

$$y' = \frac{-acx' + acx' - ad + bc}{c^2 x'} = \frac{-ad + bc}{c^2 x'}$$

identicamente uguale alla

$$y' = \left(\frac{bc - ad}{c^2}\right) \cdot \frac{1}{x'}.$$

Posto

$$k = \frac{bc - ad}{c^2}$$

si ottiene in definitiva

$$\Gamma' : y' = \frac{k}{x'}. \tag{3.19}$$

Tale equazione rappresenta un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti. La condizione inoltre $x \neq -d/c$ equivale alla $x' \neq 0$. Pertanto, siccome il grafico Γ' della (3.19) è noto, possiamo affermare che pure quello della funzione omografica originaria f, Γ, lo è: difatti per ottenere Γ basta eseguire la traslazione (3.18),

$$\tau : \begin{cases} x = x' - \frac{d}{c} \\ y = y' + \frac{a}{c} \end{cases} \qquad \text{rappresentata dal vettore} \qquad \overrightarrow{t} = \left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$$

e che collega appunto Γ' con Γ, ossia $\Gamma = \tau(\Gamma')$.

Volendo ottenere la traslazione in modo più deduttivo (anziché "imporla" come fatto inizialmente), possiamo procedere eseguendo la divisione tra i due polinomi di primo grado componenti la funzione omografica (3.17) in modo da riscriverla identicamente in una forma equivalente. Il quoziente di tale divisione è dato da a/c e il resto risulta $(bc - ad)/c$ così la (3.17) si scompone nella

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cx + d)}.$$

Raccogliendo a denominatore la costante c e trasportando a primo membro il primo addendo del secondo, l'ultima espressione risulta anche

$$y - \frac{a}{c} = \frac{bc - ad}{c^2(x + d/c)},$$

che rientra nella forma riassunta dalla (3.16). Questa riscrittura dell'equazione suggerisce di introdurre la traslazione

$$\tau^{-1} : \begin{cases} x' = x + \frac{d}{c} \\ y' = y - \frac{a}{c} \end{cases}$$

evidentemente inversa della (3.18) definita sopra. È immediato ora ottenere l'espressione (3.19) dell'immagine Γ'.

Poiché all'asintoto di equazione $x' = 0$ nella (3.19) corrisponde nella curva originaria la retta $x = -d/c$ così come a $y' = 0$ corrisponde la retta $y = a/c$, ne discende un metodo sintetico per individuare gli asintoti della funzione omografica. L'equazione dell'asintoto verticale si ottiene annullando il denominatore della (3.17) mentre l'equazione di quello orizzontale si deduce eseguendo il rapporto tra i coefficienti della variabile x a numeratore e a denominatore. Tracciate queste rette è sufficiente conoscere un punto della funzione per proporre un suo grafico approssimativo.

3.7 Esercizi vari

Diamo di seguito una scelta di esercizi riguardanti gli argomenti di questa dispensa ponendo particolare attenzione alle funzioni e ai diversi tipi di trasformazioni.

Esercizio 3.25. *È data la funzione f rappresentata da*

$$f : \begin{cases} \dfrac{x}{x+2}, & x \geq 0 \\ \sqrt{-x^2 - 2x}, & -2 \leq x < 0. \end{cases}$$

Determinato il codominio si dimostri la monotonia del ramo corrispondente alle ascisse positive, chiarendo invece in modo informale il comportamento di f in $[-2, 0[$. Applicata quindi la traslazione

$$\tau : \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases} \qquad \text{all'equazione} \qquad y = \frac{x}{x+2} \quad (x \geq 0)$$

e studiato l'insieme immagine Γ', si determini di conseguenza il grafico di f.

Esercizio 3.26. *Le equazioni*

$$f : \begin{cases} 2 + (x-1)^2, & x \geq 1 \\ 2 - (x-1)^2, & x < 1, \end{cases}$$

rappresentano la funzione f di dominio $\mathbb{R}$. Determinare di questa il codominio, il grafico Γ e la sua monotonia, dimostrando infine che f è simmetrica rispetto al punto $C(1, 2)$.

Esercizio 3.27. *La funzione g è espressa dalle*

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^3}{x^3 + 1} \\ x > -1. \end{cases}$$

Si studi il codominio e la biunivocità, determinando pure l'inversa g^{-1} e la monotonia sia di g che di g^{-1}.
Sia quindi $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione data da $y = \sqrt[3]{x}$. Ottenuta l'equazione che rappresenta $g \circ h$ si applichi a questa la traslazione

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 1 \end{cases}$$

e si studi il grafico descritto dall'equazione trasformata.

Esercizio 3.28. *Dimostrare che i grafici dell'ellisse e dell'iperbole rappresentati dalle rispettive equazioni normali, sono uniti rispetto ad una simmetria assiale di asse x e di asse y.*

Esercizio 3.29. *Dimostrare che una funzione monotòna strettamente crescente in un certo intervallo ha per immagine una funzione strettamente decrescente se ad essa si applica una simmetria assiale avente l'asse parallelo agli assi coordinati. (Analogamente per una decrescente).*

ESERCIZIO 3.30. *Si porti qualche esempio di funzioni $y = f(x)$ per le quali sia noto il grafico. Successivamente da questo, si deduca il grafico di $y = f(|x|)$.*

ESERCIZIO 3.31. *Determinare le principali proprietà di simmetria per l'insieme di punti γ descritto dalla disequazione $|(x-2)^2 + y^2 - 5| \geq 4$ e proporne una rappresentazione grafica.*

ESERCIZIO 3.32. *L'equazione $x^2 - y^2 - 5x = 0$ può essere l'equazione rappresentativa di una funzione?*

ESERCIZIO 3.33. *Definiti gli insiemi numerici $A = [-1, 1]$ e $B = [0, 1]$ si dica, motivando opportunamente, se l'equazione $y = \sqrt{1 - x^2}$ può essere l'equazione di una funzione.*

ESERCIZIO 3.34. *Se $A = \{x \,|\, x \geq 1\}$ e $B = \mathbb{R}$, l'equazione $x^2 - y^2 = 1$ è rappresentativa di una funzione? Giustificare l'affermazione.*

ESERCIZIO 3.35. *È data la $f : A \to B$ con $A = \{x \,|\, x \geq 1\}$, $B = \mathbb{R}^+$ e $x^2 - y^2 = 1$. Si chiede se f sia invertibile e perché. Determinare quindi $f^{-1} : B \to A$.*

ESERCIZIO 3.36. *Se $f : x \to \sqrt{x+1}$ e $g : x \to x^3$, ottenere le equazioni rappresentative di $f \circ g$ e $g \circ f$.*

ESERCIZIO 3.37. *Portare degli esempi non banali di funzioni f tali che $Cod(f) \subseteq B$.*

ESERCIZIO 3.38. *Proporre esempi in cui f sia una funzione suriettiva.*

ESERCIZIO 3.39. *Determinare il dominio di $y = \dfrac{x^5 + x^2}{x(x+2)}$.*

ESERCIZIO 3.40. *È data l'equazione $y = 1/x$. Se $A = B = \mathbb{R}$, l'equazione data rappresenta una funzione?*

ESERCIZIO 3.41. *La coppia di equazioni*

$$f : \begin{cases} x^2 + 3, & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{3}{x}, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

rappresenta una funzione? In caso affermativo proporre il grafico.

ESERCIZIO 3.42. *Se $A = \{x | -3 \leq x \leq 3\}$ e $B = \{y \,|\, 0 \leq y \leq 2\}$, l'equazione $x^2/9 + y^2/4 = 1$ rappresenta una funzione iniettiva e/o suriettiva?*

ESERCIZIO 3.43. *Dimostrare che l'inversa della*

$$f : \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2, & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad \text{è} \qquad f^{-1} : \begin{cases} y, & \text{se } y \geq 0 \\ -\sqrt{-y}, & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

ESERCIZIO 3.44. *Portare degli esempi che dimostrino la non commutatività dell'operazione di composizione tra funzioni.*

ESERCIZIO 3.45. *Proporre la condizione necessaria per l'esistenza della funzione composta.*

ESERCIZIO 3.46. *Ottenuta l'inversa di* $f : \mathbb{R}^+ \to B$ *di equazione* $y = -x^2 - 5$, *dimostrare che* $f[f^{-1}(y)] = y$. *A che cosa è uguale* $f^{-1}[f(x)]$?

ESERCIZIO 3.47. *Si dica se le equazioni seguenti sono rappresentative di una funzione*

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1, & \text{se } x \in [0,2] \ \wedge \ y \in [0,1] \\ (x+2)^2 + y^2 = 4, & \text{se } x \in [-4,0] \ \wedge \ y \in [-2,0]. \end{cases}$$

In caso affermativo si determinino (anche utilizzando conoscenze di Geometria Analitica) il dominio, il codominio e il grafico.

ESERCIZIO 3.48. *Si dica se le equazioni seguenti sono rappresentative di una funzione*

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1, & \text{se } x \in [0,2] \ \wedge \ y \in [0,1] \\ y = -1 + x^2, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

In caso affermativo si determinino il dominio, il codominio e il grafico.

ESERCIZIO 3.49. *Si dica se le equazioni seguenti sono rappresentative di una funzione*

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1, & \text{se } x \in [0,2] \ \wedge \ y \in [0,1] \\ x = -(y+1)^2, & \text{se } x < 0 \ \wedge \ y > -1. \end{cases}$$

In caso affermativo si determinino il dominio, il codominio e il grafico.

ESERCIZIO 3.50. *Si dimostri che la funzione* f *espressa dalle*

$$f : \begin{cases} x^2 + 5, & x \geq 0 \\ 5, & x \in]-2, 0[\\ -(x+2)^2 + 5, & x \leq -2 \end{cases}$$

non risulta invertibile. Determinato il grafico Γ, *si definisca una sua restrizione* g *invertibile.*

ESERCIZIO 3.51. *Determinare il dominio e l'equazione rappresentativa della funzione composta* $g \circ f$ *nel caso che sia*

$$f : [0,2] \to f([0,2]) \quad \text{e} \quad y = -x(x-2)$$
$$g : A \to g(A) \quad \text{e} \quad y = \sqrt{x - \frac{1}{2}}.$$

ESERCIZIO 3.52. *Proporre degli esempi rappresentativi delle proprietà* $f \circ f^{-1} = I_B$ *e* $f^{-1} \circ f = I_A$ *e coinvolgenti in modo opportuno l'equazione* $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ *o equazioni che da questa discendono.*

Esercizio 3.53. *Proporre 3 funzioni che siano separatamente solo a) iniettive, b) suriettive, c) biiettive, definendo opportunamente gli insiemi A e B e utilizzando l'equazione $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ o sue derivate.*

Esercizio 3.54. *Data l'iperbole equilatera $xy = 1$, si ottenga l'equazione rappresentativa della sua immagine γ' ottenuta tramite la traslazione*

$$\tau : \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \end{cases}$$

e se ne tracci il grafico. Dimostrare che la monotonia in ciascuno dei 2 sottoinsiemi disgiunti in cui può essere suddiviso il dominio di γ', è la medesima dell'iperbole originaria.

Esercizio 3.55. *Determinare quali proprietà di simmetria soddisfa l'insieme di punti rappresentato da $|y| = ax^2 + b$ e se ne dia il grafico per $a = -1 \wedge b = 2$ e per $a = 2 \wedge b = -1$.*

Esercizio 3.56. *Studiate le proprietà di simmetria del luogo Γ definito dalla $|xy| = k$ con $k > 0$, si rappresenti Γ nel caso che sia $k = \sqrt{3}/2$.*
Assegnata quindi l'ellisse $\epsilon : x^2/4 + y^2 = 1$ e il punto comune a Γ e ϵ, $A(1, \sqrt{3}/2)$, determinare tutti gli altri punti definiti da $\Gamma \cap \epsilon$.

Esercizio 3.57. *È data la parabola γ di equazione $y = ax^2 + b$ e la trasformazione $\tau \circ \sigma_{y=x}$, dove τ è una generica traslazione e $\sigma_{y=x}$ la simmetria assiale di asse $y = x$. Determinare la traslazione τ affinché l'immagine γ' di γ abbia equazione $x = ay^2$. γ' rappresenta ancora una funzione?*
Si generalizzi la procedura ad una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$.

Esercizio 3.58. *Dimostrare che la retta simmetrica rispetto alla bisettrice del I e III quadrante alla $r : y = mx + q$, possiede coefficiente angolare $m' = 1/m$.*

Esercizio 3.59. *Tracciato il grafico definito dalle*

$$f : \begin{cases} \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}, & \text{se } 0 \le x \le 3 \\ -\frac{1}{3}x + 1, & \text{se } x > 3, \end{cases}$$

si deduca il grafico della $f(|x|)$, scrivendone esplicitamente le equazioni rappresentative. Dimostrare quindi che il luogo ottenuto è unito rispetto a trasformazioni assiali di asse y.

Esercizio 3.60. *La funzione f di equazione $y = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + 1$ possiede il grafico di figura.*
Determinato il codominio e definite le proprietà di simmetria, ottenere quei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ dove f è monotona, dimostrandone formalmente le affermazioni.

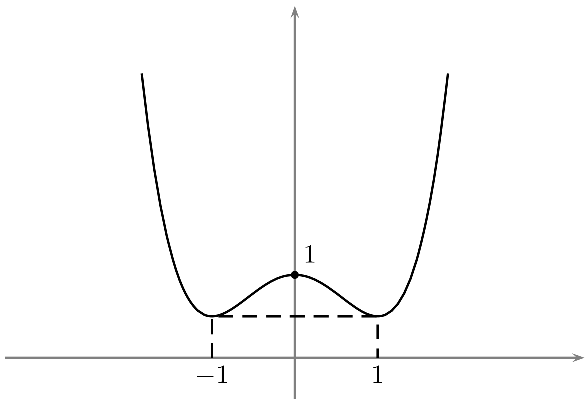


Fig. 3.14.

Esercizio 3.61. *Le due equazioni seguenti* $y = ax^2 + bx + c$ *e* $y' = ax'^2 + bx' + c$ *sono rappresentative di due parabole distinte o della stessa parabola?*

Esercizio 3.62. *Disponendo opportunamente la circonferenza* γ *sul piano cartesiano e quindi scrivendone la relativa equazione, si propongano degli esempi dove* γ *risulti invariante (unita) per ciascuna delle simmetrie seguenti:* σ_O, σ_x, σ_y, $\sigma_{y=x}$.

Esercizio 3.63. *L'insieme* δ *di punti del piano cartesiano è rappresentato dalle due equazioni*

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ x = ay^2 + by + c, \end{cases}$$

con $x, y \in \mathbb{R}$. *Rispetto a quale trasformazione* δ *risulta unito? Si dica quale eventualità deve essere soddisfatta perché tale insieme contenga due punti uniti e se ne dia una caratterizzazione algebrica.*

Esercizio 3.64. *Di quali proprietà di simmetria godono le ellissi e le iperboli centrate rispetto agli assi cartesiani? Se ne diano le ragioni osservando le proprietà comuni delle loro equazioni rappresentative.*

Esercizio 3.65. *L'equazione* $x^2 + y^2 = r^2$ *esprime un luogo* γ *di punti dotato di numerose proprietà di simmetria. Pur mantenendo valida l'equazione precedente proporre una qualsiasi modifica cosicché il nuovo insieme di punti perda completamente qualsiasi proprietà di simmetria.*

Esercizio 3.66. *Valendo la seguente implicazione* $x_2 > x_1 \Longrightarrow f(x_2) > f(x_1) \wedge g(x_2) > g(x_1)$, *si dica che cosa può dedursi circa la funzione somma* $f + g$. *Proporre una possibile restrizione al codominio di* f *e* g *in modo da poter dedurre una eventuale monotonia della funzione prodotto* $f \cdot g$.

Esercizio 3.67. *Proporre una serie di curve, il cui grafico possa essere dedotto da quello delle coniche studiate, ossia dalla circonferenza, dalla parabola,* *dall'ellisse e dall'iperbole. Di ciascuna si dia l'equazione rappresentativa assieme alle relative condizioni.*

Esercizio 3.68. *Qual è il parametro dell'equazione di una circonferenza responsabile della perdita della simmetria di questo luogo rispetto all'asse delle x di un piano cartesiano?*