La risoluzione del triangolo

Lorenzo Roi (luglio 2022)

Definizione delle funzioni e codice

Problema

Consideriamo un triangolo qualsiasi di vertici *ABC* aventi i lati di lunghezza *a, b, c* ed angoli α, β, γ (figura 1). Si vogliono determinare tutti i 6 parametri che caratterizzano il triangolo (lati *a, b, c* ed angoli α, β, γ), noto un sottoinsieme di essi. I parametri sono assunti essere tutti positivi e gli angoli verranno espressi in radianti ed inferiori a π.
Generalmente si può determinare un unico triangolo specificando opportunamente 3 dei 6 parametri benché in alcuni casi (si vedano i casi AAA e LLA) la configurazione possa essere ambigua.

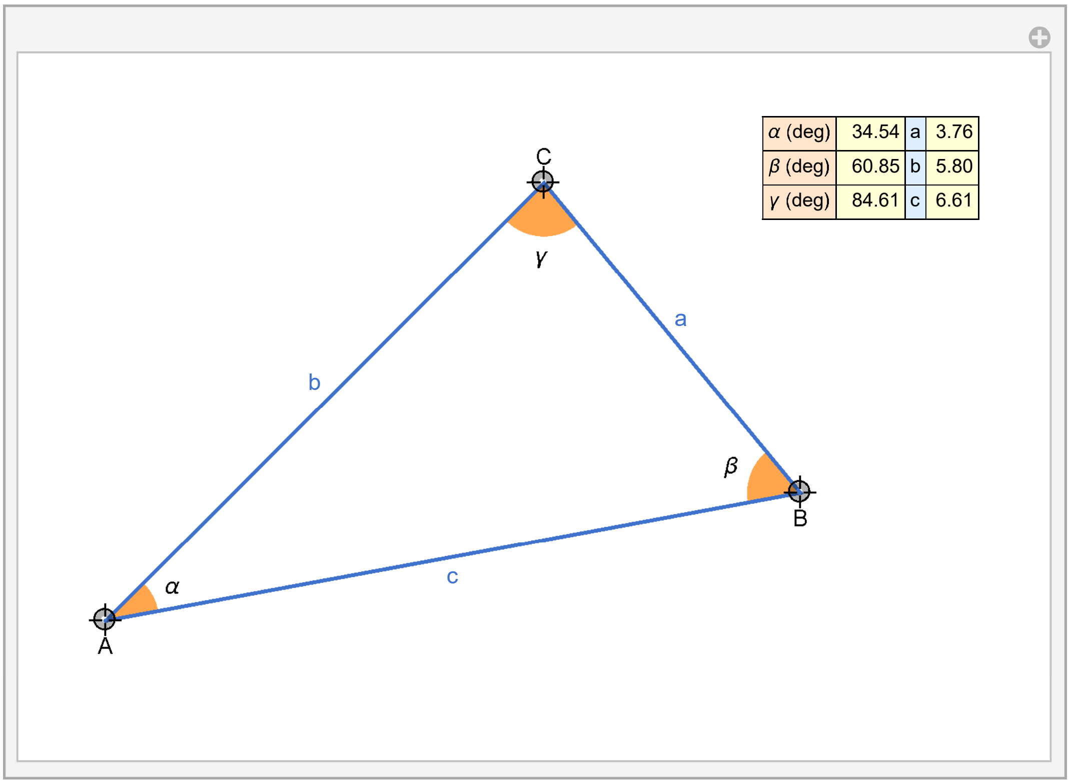


Figura 1

Possibili configurazioni

A seconda degli elementi assegnati, sono possibili 6 configurazioni: pertanto con **L** intenderemo assegnato un lato mentre con **A** è l'ampiezza di un angolo *(in radianti!)* che è conosciuta. Le configurazioni sono:
AAA (Angolo-Angolo-Angolo). Sono specificati i 3 angoli di un triangolo. Sappiamo che in tal modo

ne viene definita la forma ma esiste un'infinità di triangoli tutti simili tra di loro. Il problema quindi non possiede un'unica soluzione e risulta indeterminato data l'ambiguità sulla lunghezza dei lati.
AAL (Angolo-Angolo-Lato). Tale configurazione viene specificata assegnando due angoli e un lato *non* tra essi. Per esempio, potranno essere assegnati gli angoli α e β e il lato a (o b) ma non c. La configurazione per essere valida deve aver la somma dei due angoli minore di π: in tal caso essa ammette un'unica soluzione.
ALA (Angolo-Lato-Angolo). La configurazione consiste nel conoscere due angoli e il lato tra essi compreso (per esempio α, β e il lato c). Tale configurazione permette la determinazione di un'unica soluzione se la somma dei due angoli è minore di π.
LAL (Lato-Angolo-Lato). La configurazione coinvolge due lati e l'angolo compreso, per esempio i lati b, c e l'angolo α. Per tutti i valori dei parametri, la configurazione ammette un'unica soluzione.
LLL (Lato-Lato-Lato). Si specificano i tre lati di un triangolo. La soluzione è unica se viene rispettata la disuguaglianza triangolare ossia se la somma di due qualsiasi di essi è maggiore del terzo. Viceversa, se la lunghezza di un lato è maggiore o uguale della somma dei rimanenti non esiste alcun triangolo.
LLA (Lato-Lato-Angolo). Queste configurazioni dove sono assegnati due lati e un angolo *non compreso*, per esempio a, b e angolo α, sono ambigue e vanno trattate con attenzione. Gli esiti che si possono presentare sono diversi potendo esistere due insiemi di parametri possibili e conseguentemente due triangoli oppure un solo triangolo oppure la configurazione può essere inconsistente e rendere impossibile l'esistenza di soluzioni.

Teoremi

Il processo per determinare l'intero insieme di parametri, data una particolare configurazione, viene indicato come la *risoluzione del triangolo* e coinvolge alcune conoscenze fondamentali sui triangoli. Queste sono:

- la **somma degli angoli interni** di un triangolo è π, ossia

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

- **teorema dei seni**. Si esprime come

$$\frac{a}{\mathrm{Sin}[\alpha]} = \frac{b}{\mathrm{Sin}[\beta]} = \frac{c}{\mathrm{Sin}[\gamma]}$$

- **teorema del coseno** o di **Carnot**:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, c\, \mathrm{Cos}[\alpha]$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\, a\, c\, \mathrm{Cos}[\beta]$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\, a\, b\, \mathrm{Cos}[\gamma]$$

ed infine, la **disuguaglianza triangolare**

$$a < b + c$$

valida per *qualsiasi* permutazione dei lati a, b, c (ossia devono pure valere $b < a + c$ e $c < a + b$).

Implementazione

Funzioni di base

In base ai teoremi delineati sopra vengono qui definite e commentate alcune funzioni di base che permettono una scrittura più sintetica delle funzioni successive.
La prima `LatoCarnot`, fornisce la lunghezza di un lato utilizzando il teorema di Carnot: devono pertanto essere noti due lati e l'angolo compreso e restituisce la lunghezza del lato opposto all'angolo.

```
LatoCarnot[a_, b_, γ_] := Sqrt[a^2 + b^2 - 2 a b Cos[γ]];(* fornisce il lato c *)
```

Nel caso che siano conosciuti due angoli (per es. α e β) ed il lato opposto ad uno di essi (per es. a), in base al teorema dei seni si ottiene la lunghezza del lato opposto all'angolo rimanente (per es. b). La funzione è

```
LatoSeni[a_, α_, β_] := a Sin[β] / Sin[α];(* fornisce il lato b *)
```

Sempre in base al teorema dei seni si può ottenere l'angolo opposto ad uno dei due lati noti (per es. b e a) se risulta assegnato pure l'angolo opposto all'altro (per es. α). Dei due valori possibili per l'angolo (acuto o ottuso) questa funzione restituisce l'angolo acuto.

```
AngSeni[b_, a_, α_] := ArcSin[b Sin[α] / a];(* fornisce l'angolo β *)
```

Analogamente, noti i tre lati si può ottenere l'angolo opposto al primo lato inserito tra gli argomenti della funzione seguente

```
AngCarnot[a_, b_, c_] := ArcCos[(b^2 + c^2 - a^2) / (2 b c)]; (* fornisce l'angolo α *)
```

pure quest'ultima si basa, ancora, sul teorema di Carnot.

Prime funzioni

Funzione AAA

Evidentemente dati i soli tre angoli di un ipotetico triangolo non è possibile determinarne univocamente uno. Infatti esiste un'infinità di triangoli aventi gli angoli assegnati, tutti simili uno all'altro. Per poterne determinare uno va quindi dato almeno un lato per cui si ricade nel caso AAL oppure ALA.

Funzione LAL

La scrittura della funzione collegata alla configurazione LAL è immediata in quanto, per qualsiasi terna *lato-angolo compreso-lato,* si può ottenere il triangolo corrispondente.

Se quindi sono dati l'angolo α e i lati b e c, allora

`a = LatoCarnot[b, c, α]`   e   `β = AngCarnot[b, c, a]`   e $\gamma = \pi - \alpha - \beta$

Il triangolo viene fornito dalla funzione LAL e da tutte le successive funzioni sotto forma di matrice di 3 righe e 2 colonne, dove la prima colonna dà gli angoli (in radianti, salvo l'utilizzo dell'opzione "deg") e la seconda le lunghezze dei lati corrispondenti (nella convenzione definita all'inizio).

Inoltre, sia in questa che nelle funzioni successive, utilizziamo il comando di *Mathematica* Module: in tal modo possiamo definire delle variabili locali che rendono più agevole la lettura e l'individuazione delle proprietà. Per esempio, in LAL, la variabile locale *c* mette in evidenza che il terzo lato si ottiene applicando il teorema di Carnot: analogamente per l'angolo α. Nel caso che l'angolo dato sia maggiore di π ovviamente il triangolo non esiste e la funzione restituisce la stringa NE (Non Esiste).

Out[∘]=

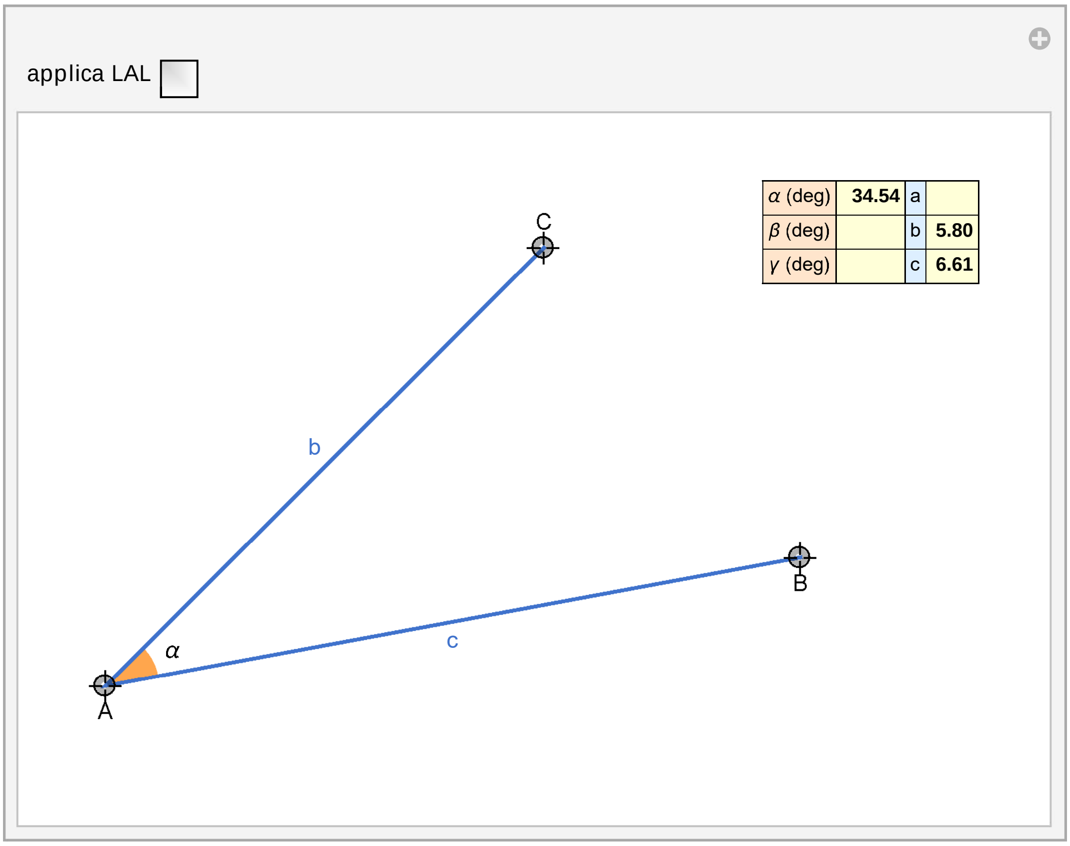


Figura 2

Esempi di utilizzo: per ottenere gli angoli in output espressi in radianti (il default) è sufficiente richiamare mentre il fattore **Degree=π/180** converte il valore in radianti.

In[∘]:=
```
LAL[5.8, 34.54 Degree, 6.61]
```

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1.06244 & 5.8 \\ 1.47632 & 6.61 \\ 0.602837 & 3.76454 \end{pmatrix}$$

Per ottenere l'output in gradi (e quindi confrontarli con quelli della tabella inserita nel grafico precedente) la funzione va richiamata con l'opzione "deg" ossia

In[∘]:=
```
LAL[5.8, 34.54 Degree, 6.61, "deg"]
```

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 60.8733 & 5.8 \\ 84.5867 & 6.61 \\ 34.54 & 3.76454 \end{pmatrix}$$

Nel caso che l'angolo sia maggiore di π non otteniamo alcun triangolo (NE = Non Esiste).

In[ ]:=
```
{LAL[5.8, 185 Degree, 6.61], LAL[5.8, 3.2, 6.61]}
```
Out[ ]=
```
{NE, NE}
```

Funzione AAL

Pure la funzione **AAL** non presenta particolari difficoltà. Nel caso però che la somma dei due angoli dati sia maggiore o eguale a π non è possibile determinare il triangolo. In tal caso la funzione restituisce la stringa NE (Non Esiste). I lati rimanenti vengono calcolati applicando due volte il teorema dei seni come appare evidente dalla definizione delle due variabili locali, a e *b.*

`a = LatoSeni[c, γ, α]` e `b = LatoSeni[a, α, π - α - γ]`

Come sottolineato negli esempi il primo angolo immesso è quello opposto al lato conosciuto e l'angolo posto come terzo argomento è collegato al lato fornito in output.

Out[ ]=

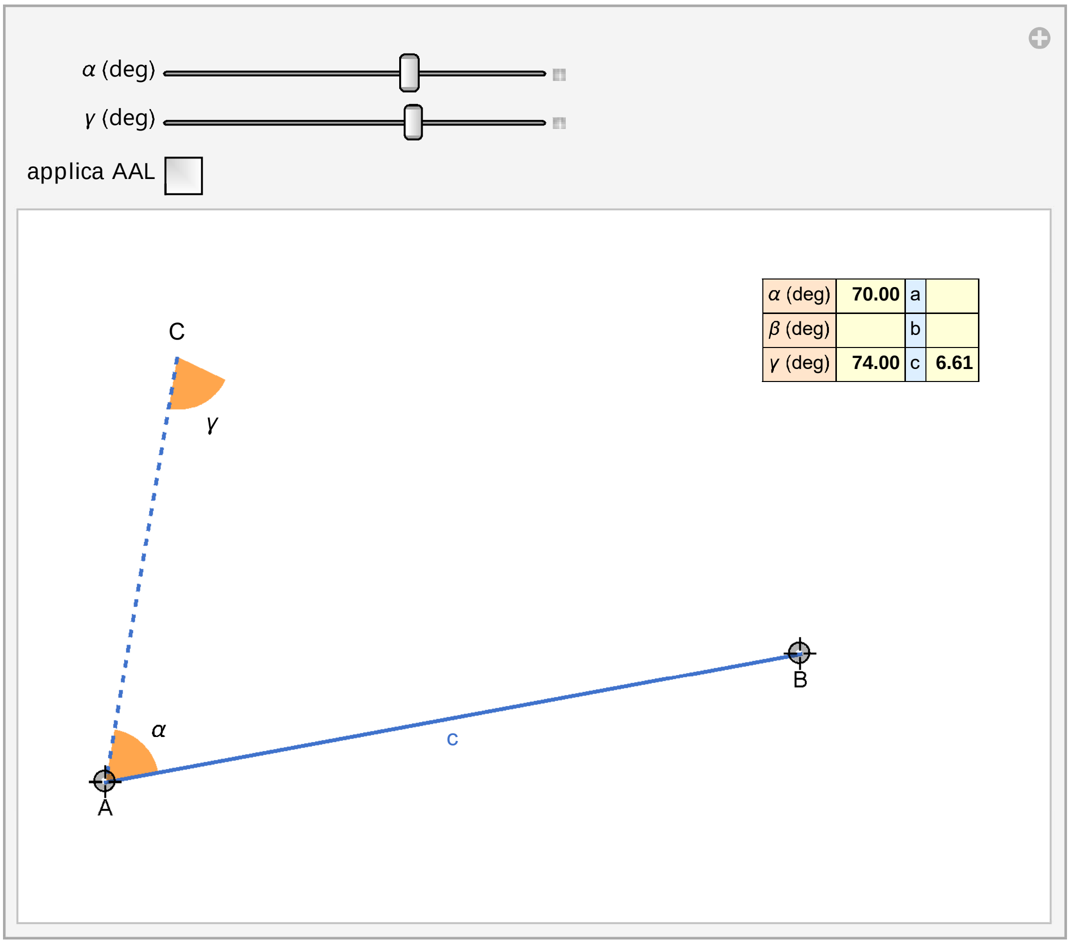


Figura 3

Esempi: con angoli in output in radianti

In[ ]:=
```
AAL[74. Degree, 70. Degree, 6.61]
```
Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1.29154 & 6.61 \\ 1.22173 & 6.46168 \\ 0.628319 & 4.04183 \end{pmatrix}$$

oppure con angoli in output espressi in gradi

In[∘]:=
```
AAL[74. Degree, 70. Degree, 6.74, "deg"]
```

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 74. & 6.74 \\ 70. & 6.58877 \\ 36. & 4.12133 \end{pmatrix}$$

mentre non esiste alcun triangolo se la somma dei due angoli noti è maggiore di π

In[∘]:=
```
{AAL[2, 2, 6], AAL[74. Degree, 120. Degree, 5, "deg"]}
```

Out[∘]=
```
{NE, NE}
```

Funzione ALA

Per il caso ALA, dove il lato assegnato è quello compreso tra i due angoli, va ancora rispettata la condizione $\alpha + \beta < \pi$. In caso contrario non esiste il triangolo. I lati mancanti si ottengono ancora con il teorema dei seni.

a = LatoSeni[c, $\pi - \alpha - \beta$, α] e b = LatoSeni[c, $\pi - \alpha - \beta$, β]

Out[∘]=

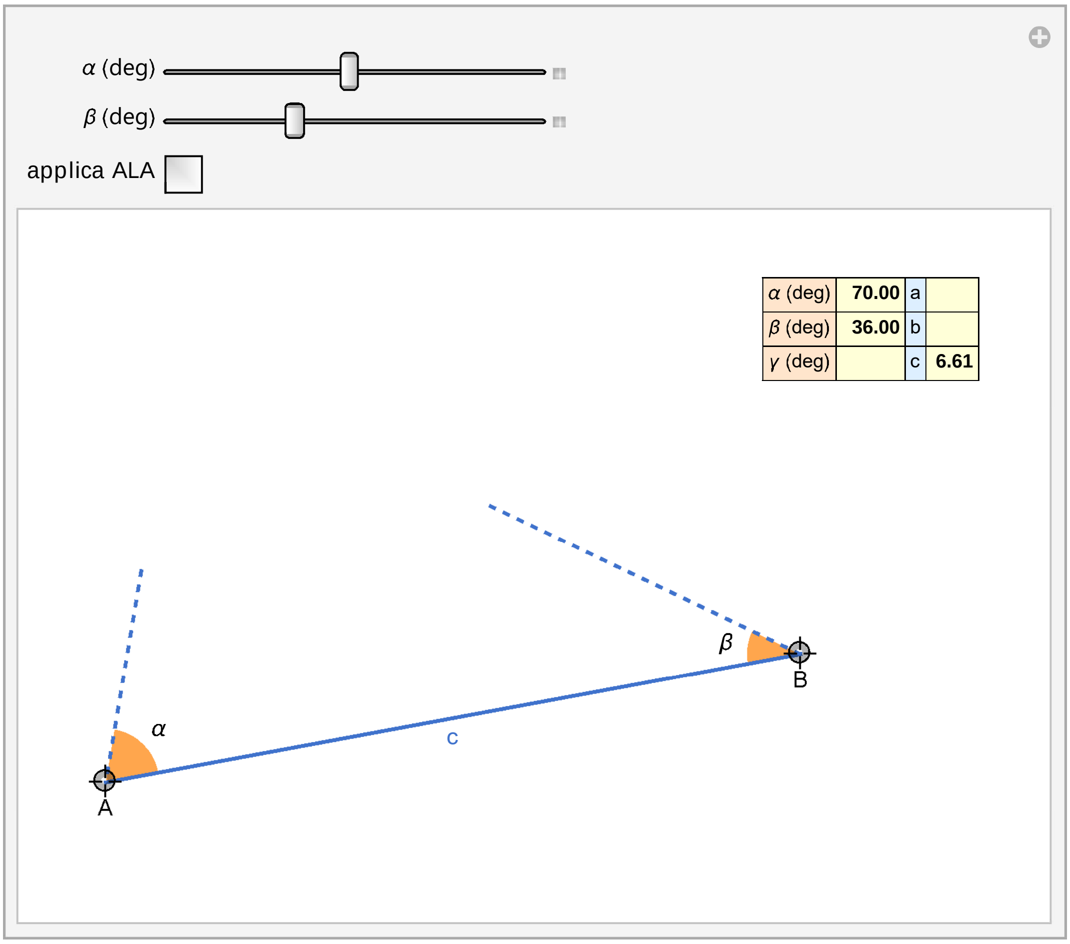


Figura 4

Esempio con angoli in output radianti

In[ ]:=
```
ALA[70. Degree, 6.61, 36. Degree]
```

Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1.22173 & 6.46168 \\ 0.628319 & 4.04183 \\ 1.29154 & 6.61 \end{pmatrix}$$

oppure con output in gradi

In[ ]:=
```
ALA[70. Degree, 6.61, 36. Degree, "deg"]
```

Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 70. & 6.46168 \\ 36. & 4.04183 \\ 74. & 6.61 \end{pmatrix}$$

Il triangolo non esiste se la somma dei due angoli è maggiore di π

In[ ]:=
```
{ALA[2, 6, 2], ALA[70. Degree, 6, 121 Degree]}
```

Out[ ]=
```
{NE, NE}
```

Funzione LLL

La realizzazione della funzione LLL implica un controllo sulla disuguaglianza triangolare. Difatti per esempio, un triangolo con un lato pari ad 1, un altro pari a 2 ed un terzo di lunghezza 10 non può esistere (si pensi a delle circonferenze di raggi 1 e 2 centrate ai due estremi del lato di lunghezza 10: queste evidentemente non si possono intersecare e definire quindi il terzo vertice).
Sia *a* il lato maggiore tra i tre del triangolo. Dalla disuguaglianza triangolare discende che

$$a < b + c$$

Sommando ad entrambi i membri *a* otteniamo

$$2a < a + b + c$$

che è equivalente alla

$$a < \frac{a + b + c}{2}$$

Nella funzione LLL tale controllo viene realizzato individuando il lato maggiore con la funzione `Max` e quindi si verifica la precedente disuguaglianza.
Per la determinazione degli angoli si utilizza la funzione di base derivata dal teorema di Carnot per cui

α = AngCarnot[a, b, c], β = AngCarnot[b, a, c], γ = AngCarnot[c, a, b] applica LLL

Out[∘]=

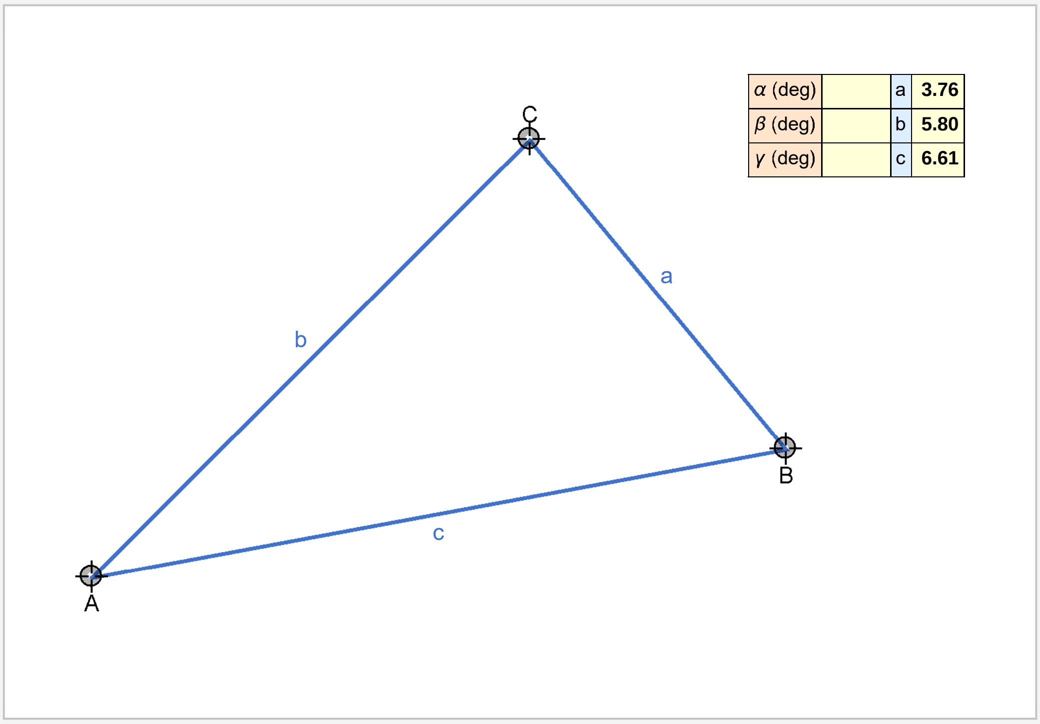


Figura 5

Esempio con angoli in output radianti

In[∘]:=
```
LLL[3.76, 5.8, 6.61]
```

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.602051 & 3.76 \\ 1.06255 & 5.8 \\ 1.47699 & 6.61 \end{pmatrix}$$

oppure con output in gradi

In[∘]:=
```
LLL[3.76, 5.8, 6.61, "deg"]
```

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 34.495 & 3.76 \\ 60.8798 & 5.8 \\ 84.6252 & 6.61 \end{pmatrix}$$

Il triangolo non esiste se non viene rispettata la disuguaglianza triangolare

In[∘]:=
```
{LLL[4.99, 2, 3], LLL[5.01, 2, 3]}
```

Out[∘]=

$$\left\{\begin{pmatrix} 3.01247 & 4.99 \\ 0.0516326 & 2 \\ 0.077492 & 3 \end{pmatrix}, \mathrm{NE}\right\}$$

Funzione LLA

Funzione LLA

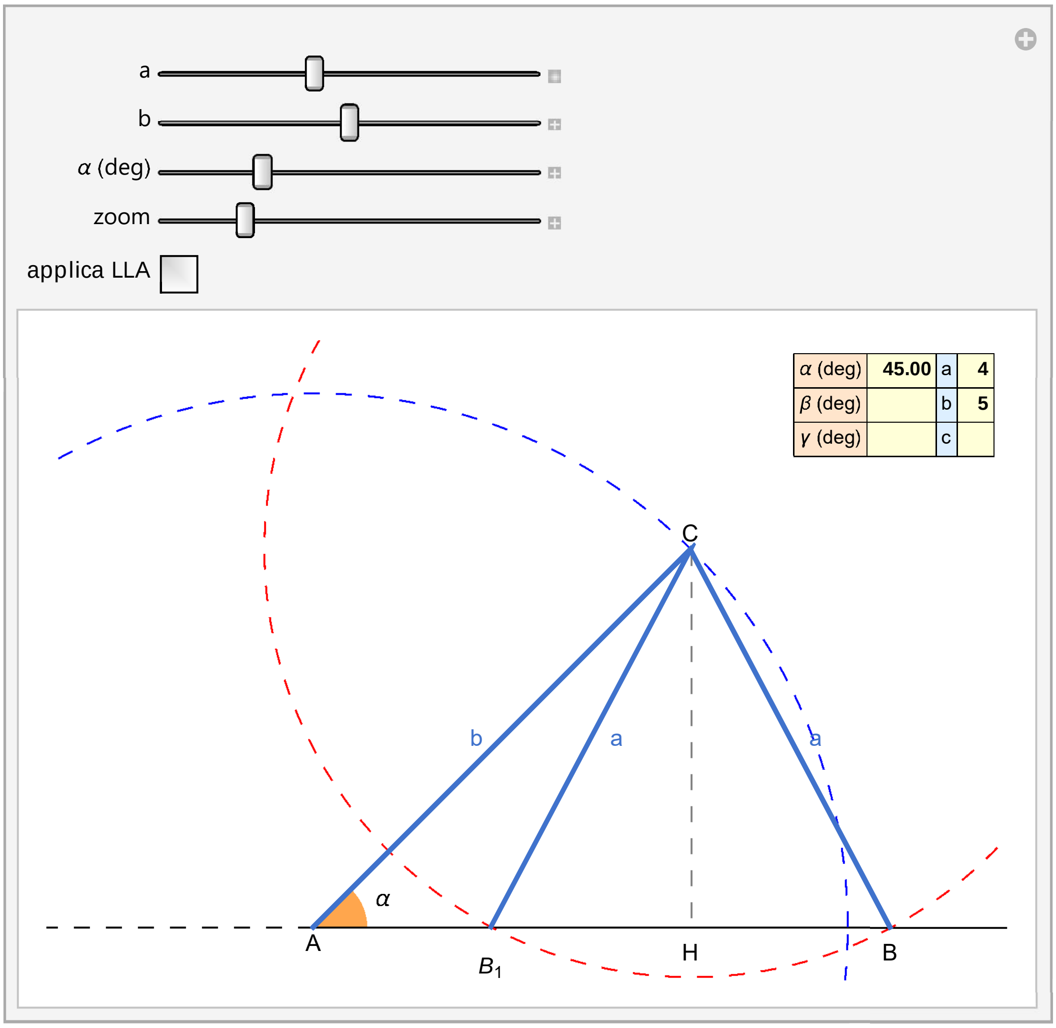


Figura 6

La definizione della funzione LLA è certamente più complessa delle altre e pertanto risulta conveniente suddividerla in più parti ciascuna controllata da comandi condizionali IF annidati ma che, per compattezza, si traducono nel codice del comando **`Which`** in una successione di condizioni logiche ciascuna associata a particolari istruzioni. Nel seguito, per ciascuna eventualità, chiariamo tramite una immagine il significato geometrico sia quello algebrico.

b* sen (*α*) > *a

Difatti, supponiamo siano dati i due lati *a* e *b* e l'angolo *α* (nella figura 7 e in quelle successive rappresentiamo pure le circonferenze di raggi *a* e *b*). Nella situazione geometrica rappresentata (e l'analoga per *α* ottuso) appare evidente che, qualsiasi sia l'angolo *γ* nel vertice C, il lato *a* non interseca la retta orizzontale in modo da formare un triangolo. È cioè CH > *a*. Algebricamente ciò significa che

$$CH = b \sin(\alpha) > a$$

e conseguentemente l'angolo *β* non può esistere. Difatti, in base al teorema dei seni, dovrebbe essere

$$\sin(\beta) = \frac{b \sin(\alpha)}{a} < 1$$

mentre risulta

$$\frac{b \sin(\alpha)}{a} > 1.$$

Out[•]=

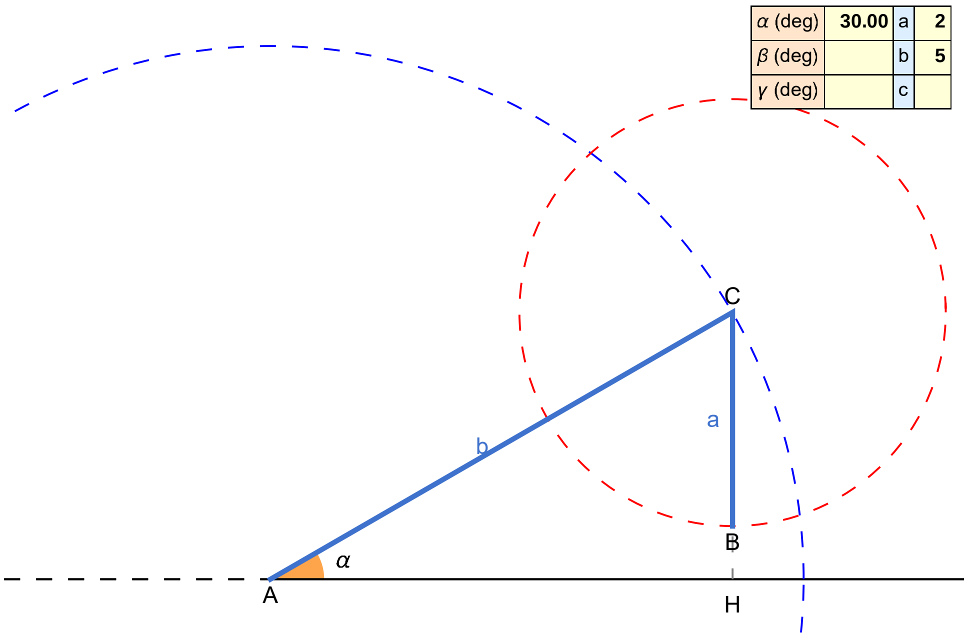


Figura 7

La dichiarazione di LLA inizia pertanto affermando la non esistenza del triangolo se risulta soddisfatta la $b\sin(\alpha) > a$. In caso contrario può essere $b\sin(\alpha) = a$ per cui si possono presentare due casi a seconda che sia $\alpha < \pi/2$ oppure $\alpha \geq \pi/2$.

$b\sin(\alpha) = a, \quad \alpha < \pi/2$

La prima con α acuto (figura 8) ammette l'esistenza di un triangolo rettangolo con $\beta = \pi/2$,

```
β = π / 2,    γ = π / 2 - α,    c = LatoSeni[a, α, γ]
```

Out[ ]=

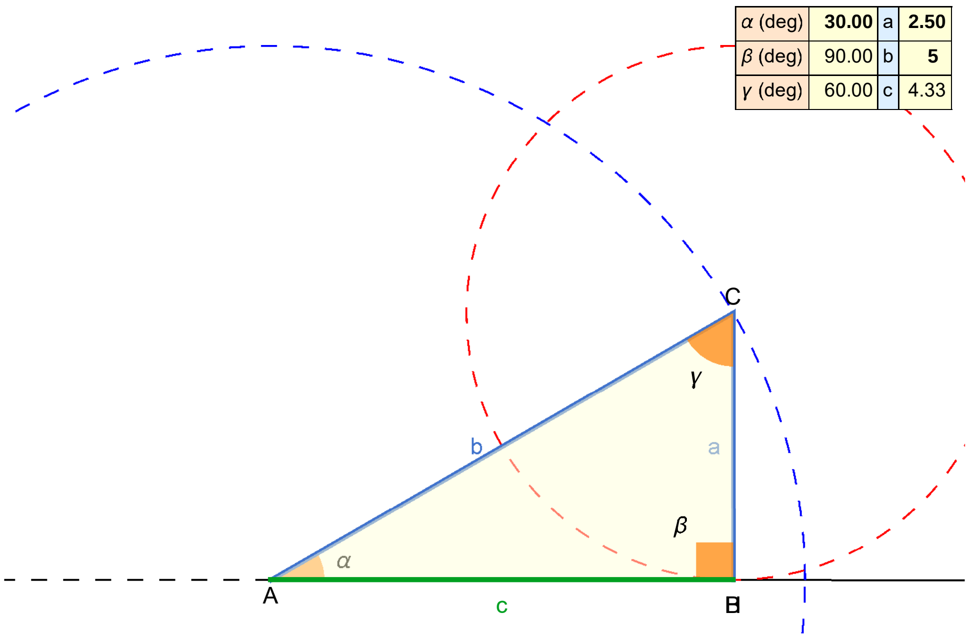


Figura 8

$b \sin(\alpha) = a, \quad \alpha \geq \pi/2$

mentre la seconda con α ottuso o retto (figura 9) non può produrre alcun triangolo (α diverrebbe un angolo esterno al triangolo). Dal punto di vista algebrico in entrambi i casi discende che

$$\sin(\beta) = \frac{b \sin(\alpha)}{a} = 1 \quad \text{per cui} \quad \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Out[ ]=

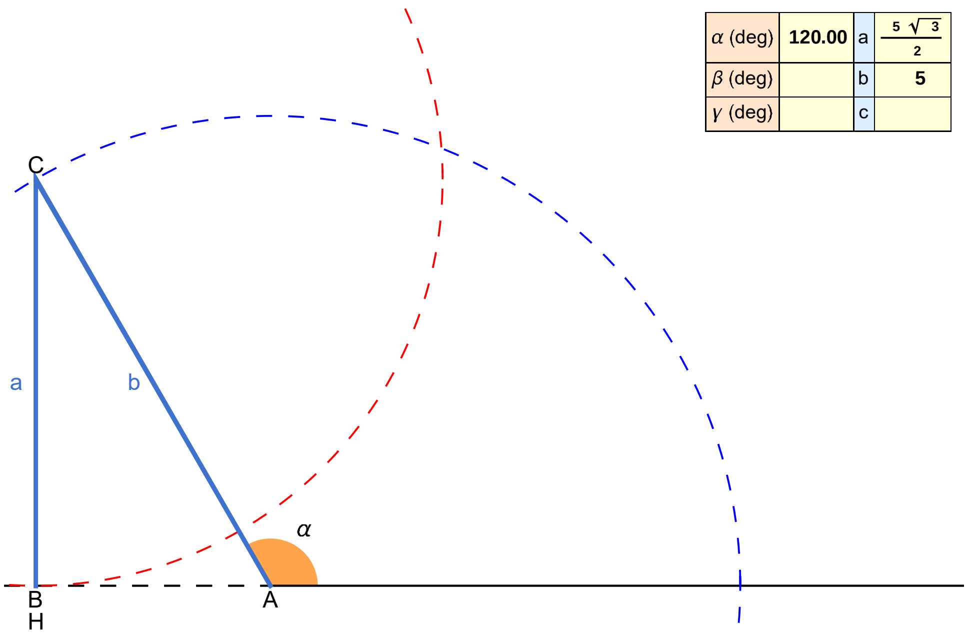


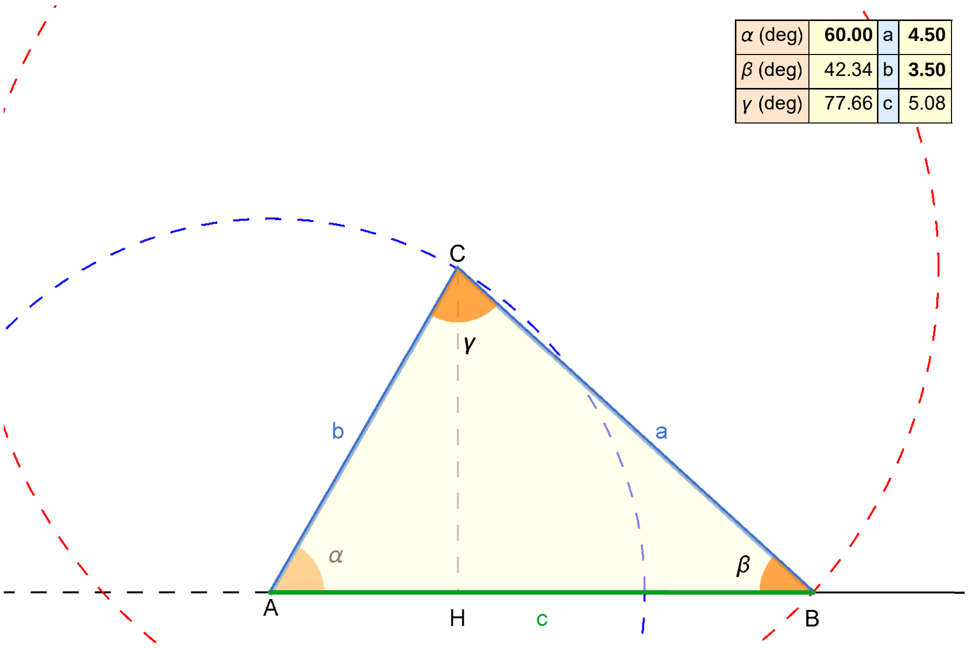
Figura 9

$b \sin(\alpha) < a, \quad b < a$

Se $b \sin(\alpha) < a$ e nell'ipotesi che sia $b < a$ (figura 10) ammette un'unica soluzione per ogni $\alpha < \pi$. In figura 10 è infatti rappresentata la situazione con α acuto, mentre nella fig. 11 con α ottuso. Gli angoli e il lato si ottengono con le funzioni

β = AngSeni[b, a, α], $\gamma = \pi - \alpha - \beta$,   c = LatoSeni[a, α, γ]

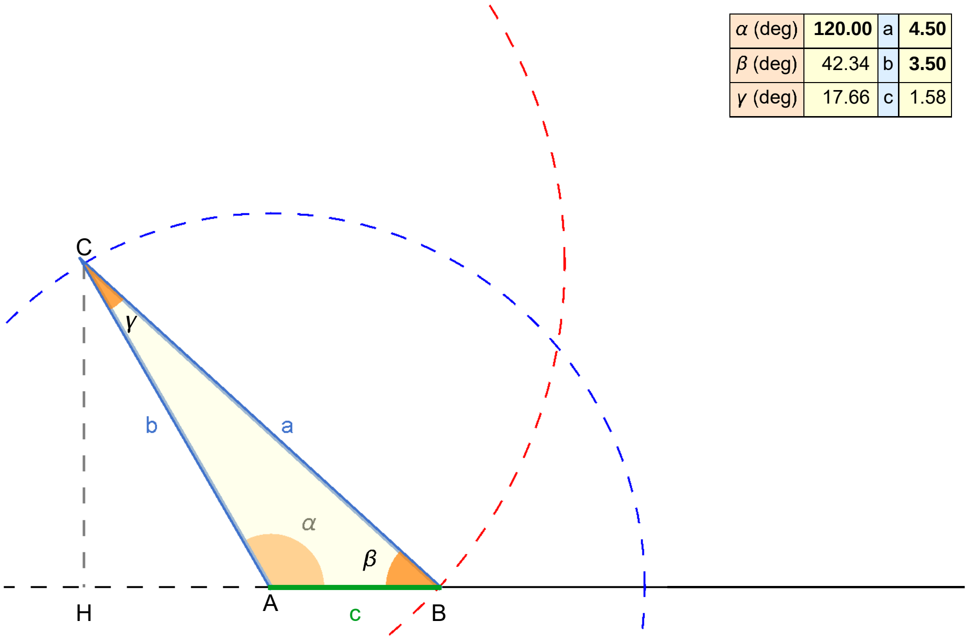
Out[∘]=



α (deg)	**60.00**	a	**4.50**
β (deg)	42.34	b	**3.50**
γ (deg)	77.66	c	5.08

Figura 10

Out[∘]=



α (deg)	**120.00**	a	**4.50**
β (deg)	42.34	b	**3.50**
γ (deg)	17.66	c	1.58

Figura 11

La trattazione algebrica di queste situazioni si può condurre imponendo la condizione che la somma $\alpha + \beta < \pi$. Difatti, dalla

$$\sin(\beta) = \frac{b \sin(\alpha)}{a}$$

si possono determinare due valori supplementari di β, diciamo β (acuto) e $\beta_1 = \pi - \beta$ (ottuso). Imponendo che

$$\alpha + \beta < \pi \quad \text{discende} \quad \alpha + \text{Arcsin}\left(\frac{b \sin(\alpha)}{a}\right) < \pi \quad \text{cioè} \quad \text{Arcsin}\left(\frac{b \sin(\alpha)}{a}\right) < \pi - \alpha.$$

Ora se $\pi - \alpha \geq \frac{\pi}{2}$ ossia $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$ la disuguaglianza è sempre soddisfatta mentre se $\alpha > \frac{\pi}{2}$, considerando il seno di entrambi i membri, si ricava

$\frac{b \sin(\alpha)}{a} < \sin(\alpha)$ da cui $b < a$.

In entrambe le situazioni quindi si giunge ad un solo triangolo.
Scegliendo invece la soluzione $\beta_1 = \pi - \beta$, si constata subito che la disuguaglianza $\alpha + \beta_1 < \pi$ è soddisfatta solo per $b > a$. Difatti

$\alpha + \beta_1 < \pi$ implica $\alpha + \pi - \text{Arcsin}\left(\frac{b \sin(\alpha)}{a}\right) < \pi$ e quindi $\alpha < \text{Arcsin}\left(\frac{b \sin(\alpha)}{a}\right)$.

Supposto $\alpha < \frac{\pi}{2}$ (in caso contrario non vi possono essere soluzioni) e considerando il seno dei due membri si ottiene

$\sin(\alpha) < \frac{b \sin(\alpha)}{a}$ da cui $b > a$.

Non emergono pertanto ulteriori soluzioni considerando la seconda soluzione β_1.

$b \sin(\alpha) < a$, $b = a$, $\alpha \geq \pi/2$

Nel caso si abbia $b = a$ si presentano le ulteriori due possibilità: $\alpha \geq \pi/2$ oppure $\alpha < \pi/2$. La prima, fig. 12, non permette l'esistenza di alcun triangolo

Out[ ]=

α (deg)	110.00	a	4
β (deg)		b	4
γ (deg)		c	

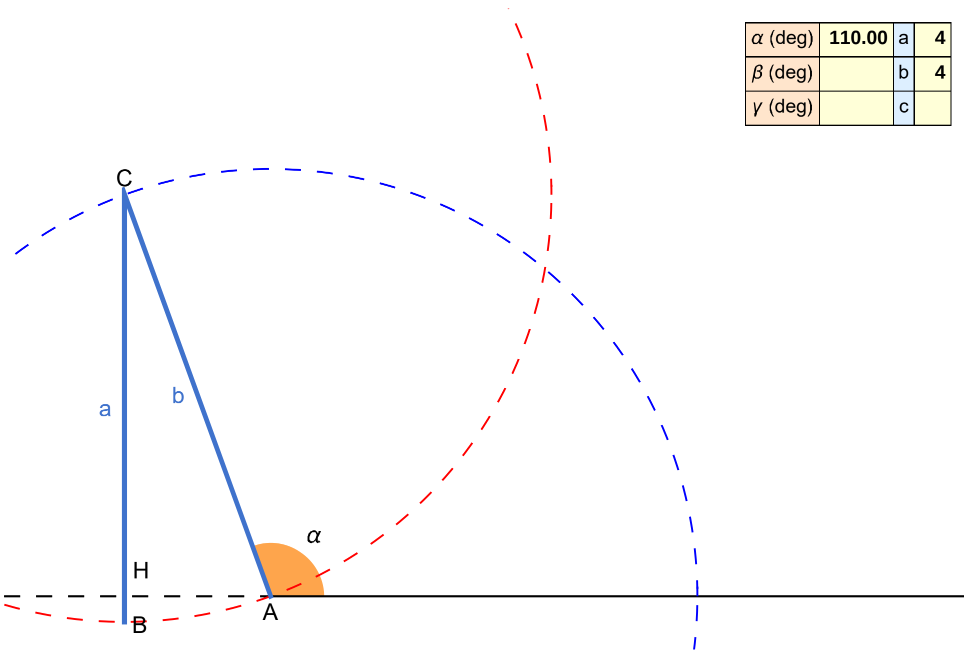


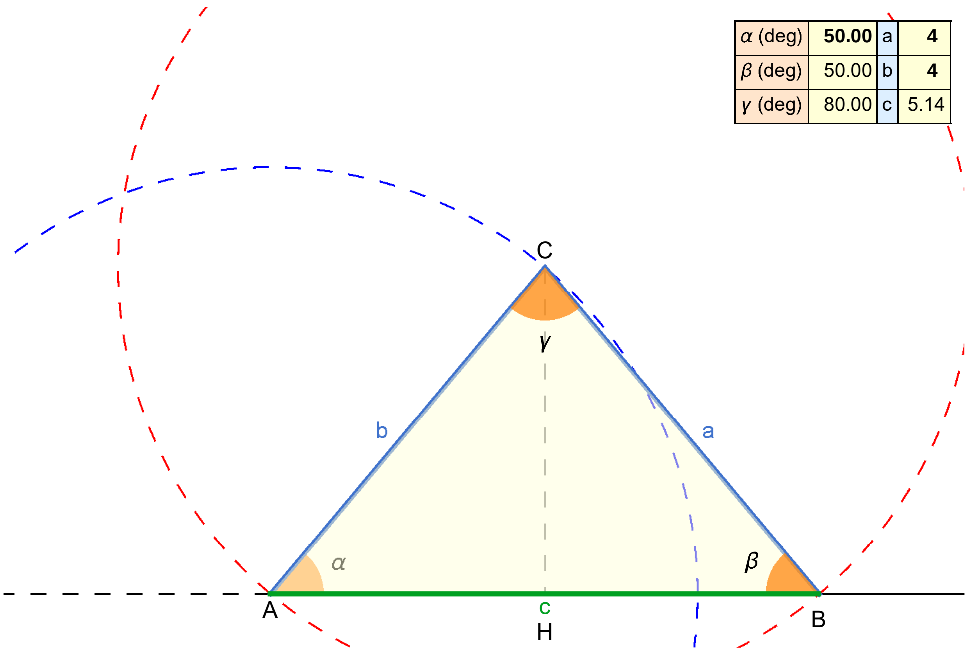
Figura 12

$b \sin(\alpha) < a$, $b = a$, $\alpha < \pi/2$

mentre se $\alpha < \pi/2$ (fig. 13) il triangolo è evidentemente isoscele. Questo si ottiene con le funzioni

$\beta = \alpha$, $\gamma = \pi - 2\alpha$, c = LatoSeni[a, α, γ]

Out[•]=



α (deg)	**50.00**	a	**4**
β (deg)	50.00	b	**4**
γ (deg)	80.00	c	5.14

Figura 13

Algebricamente dalla

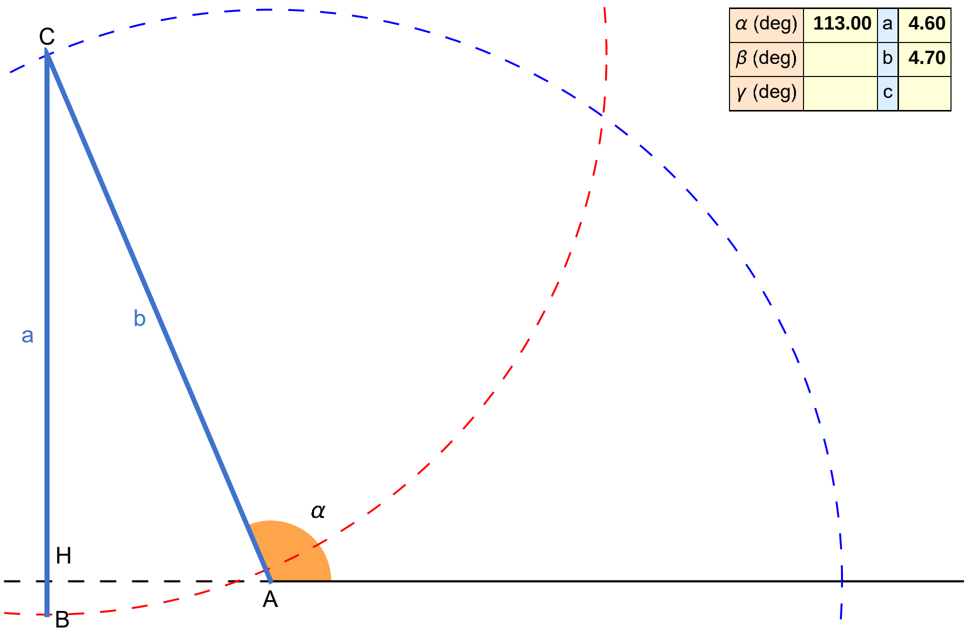
$\sin(\beta) = \dfrac{b \sin(\alpha)}{a}$ discende $\sin(\beta) = \sin(\alpha)$ per cui $\beta = \alpha$ oppure $\beta_1 = \pi - \alpha$.

La prima eventualità fornisce il triangolo isoscele mentre la seconda non soddisfa evidentemente alla $\alpha + \beta_1 < \pi$.

$b \sin(\alpha) < a, \;\; b > a, \;\; \alpha \geq \pi/2$

Quando invece sia $b > a$ e, ancora, $\alpha \geq \pi/2$ il triangolo non può esistere (fig. 14).

Out[•]=



α (deg)	**113.00**	a	**4.60**
β (deg)		b	**4.70**
γ (deg)		c	

Figura 14

Questa impossibilità si dimostra algebricamente ponendo ancora $\alpha + \beta < \pi$. Poiche' $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$, β non potrà che essere acuto per cui

$$\alpha + \beta < \pi, \quad \alpha + \mathrm{Arcsin}\left(\frac{b \sin(\alpha)}{a}\right) < \pi, \quad \mathrm{Arcsin}\left(\frac{b \sin(\alpha)}{a}\right) < \pi - \alpha.$$

Considerando il seno di entrambi i membri (sono entrambi minori di $\frac{\pi}{2}$)

$$\frac{b \sin(\alpha)}{a} < \sin(\alpha) \quad \text{da cui} \quad b < a \quad \text{incompatibile con l' ipotesi } b > a.$$

$b \sin(\alpha) < a, \; b > a, \; \alpha < \pi/2$

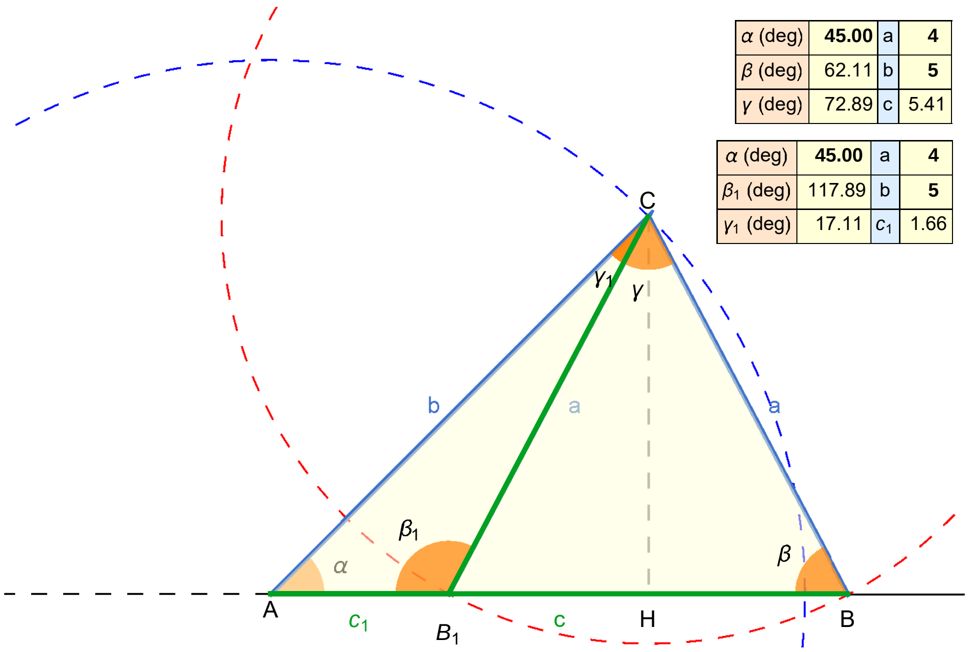
Nell'ultima eventualità rimasta è $\alpha < \frac{\pi}{2}$. In tal caso si presentano due soluzioni rappresentate nella figura 15

β = AngSeni[b, a, α], $\gamma = \pi - \alpha - \beta$, c = LatoSeni[a, α, γ]

oppure

$\beta_1 = \pi - \beta$, $\gamma_1 = \pi - \alpha - \beta_1$, c_1 = LatoSeni[a, α, γ_1]

Out[ ]=



α (deg)	45.00	a	4
β (deg)	62.11	b	5
γ (deg)	72.89	c	5.41

α (deg)	45.00	a	4
β_1 (deg)	117.89	b	5
γ_1 (deg)	17.11	c_1	1.66

Figura 15

Difatti la figura mostra che in corrispondenza del medesimo α si possono individuare due angoli opposti al lato di lunghezza b, uno acuto e l'altro ottuso. Entrambe cioè le soluzioni della

$$\sin(\beta) = \frac{b \sin(\alpha)}{a}, \quad \text{sia} \quad \beta = \mathrm{Arcsin}\left(\frac{b \sin(\alpha)}{a}\right), \quad \text{sia} \quad \beta_1 = \pi - \beta$$

soddisfano alla diseguaglianza $\alpha + \beta < \pi$ $(\alpha + \beta_1 < \pi)$. Nel primo caso

$$\alpha + \beta < \pi \quad \text{implica} \quad \mathrm{Arcsin}\left(\frac{b \sin(\alpha)}{a}\right) < \pi - \alpha$$

relazione che è certamente soddisfatta con α acuto perché $\pi - \alpha > \frac{\pi}{2}$.

Nel secondo caso è

$$\alpha + \beta_1 < \pi \quad \alpha + \pi - \mathrm{Arcsin}\left(\frac{b \sin(\alpha)}{a}\right) < \pi \quad \text{dalla quale discende} \quad \alpha < \mathrm{Arcsin}\left(\frac{b \sin(\alpha)}{a}\right)$$

Considerando il seno di entrambi i membri

$$\sin(\alpha) < \frac{b \sin(\alpha)}{a} \quad \text{da cui } b > a,$$

che coincide con l'ipotesi $b > a$.
Un'ultima osservazione: nella chiamata alla funzione LLA[a, b, α] si deve porre attenzione al fatto che il primo argomento rappresenta la lunghezza del lato opposto all'angolo inserito come terzo argomento.

Esempi

Portiamo alcuni esempi delle funzioni definite sopra.

Funzione LAL

In[ ]:= $\text{LAL}\left[1, \frac{\pi}{6}, 2\right]$

Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \text{ArcCos}\left[\frac{8-2\sqrt{3}}{4\sqrt{5-2\sqrt{3}}}\right] & 1 \\ \frac{5\pi}{6} - \text{ArcCos}\left[\frac{8-2\sqrt{3}}{4\sqrt{5-2\sqrt{3}}}\right] & 2 \\ \frac{\pi}{6} & \sqrt{5-2\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Funzione AAL

In[ ]:= $\text{AAL}\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, 1\right]$

Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{\pi}{3} & 1 \\ \frac{\pi}{4} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{5\pi}{12} & \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Verifichiamo come non si ottenga nessun triangolo se la somma degli angoli è maggiore di π.

In[ ]:= $\text{AAL}\left[\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, 1\right]$

Out[ ]= NE

Va tenuto presente che non è indifferente scambiare gli angoli dati in questa funzione. Difatti si deve considerare che il terzo dato cioè il lato, va inteso come il lato opposto al primo angolo immesso (si veda la definizione): in caso contrario si ottiene un triangolo diverso.

In[ ]:= $\text{AAL}\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, 1\right]$

Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} & 1 \\ \frac{\pi}{3} & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \frac{5\pi}{12} & \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right) \end{pmatrix}$$

Funzione ALA

In[∘]:= ALA$\left[\frac{\pi}{4}, 1, \frac{\pi}{10}\right]$

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} & \frac{\text{Sec}\left[\frac{3\pi}{20}\right]}{\sqrt{2}} \\ \frac{\pi}{10} & \frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}\right)\text{Sec}\left[\frac{3\pi}{20}\right] \\ \frac{13\pi}{20} & 1 \end{pmatrix}$$

Funzione LLL

In[∘]:= LLL$\left[\sqrt{6}, 3+\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right]$ // FullSimplify

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{\pi}{6} & \sqrt{6} \\ \frac{7\pi}{12} & 3+\sqrt{3} \\ \frac{\pi}{4} & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Come per la funzione AAL, se non viene rispettata la disuguaglianza triangolare non si ottiene alcun triangolo valido.

In[∘]:= LLL[1, 2, 5]

Out[∘]= NE

Funzione LLA

In[∘]:= LLA$\left[2, 1.5, \frac{\pi}{6}\right]$

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{\pi}{6} & 2 \\ 0.384397 & 1.5 \\ 2.2336 & 3.15309 \end{pmatrix}$$

In[∘]:= LLA$\left[1, 1, \frac{\pi}{6}\right]$

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{\pi}{6} & 1 \\ \frac{\pi}{6} & 1 \\ \frac{2\pi}{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

In[∘]:= LLA$\left[1, 1.5, \frac{\pi}{6}\right]$

Out[∘]= $\begin{pmatrix} \frac{\pi}{6} & 1 \\ 0.848062 & 1.5 \\ 1.76993 & 1.96048 \end{pmatrix} \;||\; \begin{pmatrix} \frac{\pi}{6} & 1 \\ 2.29353 & 1.5 \\ 0.324463 & 0.6376 \end{pmatrix}$

In[ ]:= $\text{LLA}\left[10\sqrt{6},\ 30\sqrt{2},\ \frac{\pi}{6}\right]$

Out[ ]= $\begin{pmatrix} \frac{\pi}{6} & 10\sqrt{6} \\ \frac{\pi}{3} & 30\sqrt{2} \\ \frac{\pi}{2} & 20\sqrt{6} \end{pmatrix} \ | \ | \ \begin{pmatrix} \frac{\pi}{6} & 10\sqrt{6} \\ \frac{2\pi}{3} & 30\sqrt{2} \\ \frac{\pi}{6} & 10\sqrt{6} \end{pmatrix}$

Come in AAL pure in LLA è importante l'ordine di inserimento dei due lati noti. L'angolo che si inserisce nella funzione LLA è quello opposto al lato inserito per primo nella funzione. Difatti con i dati seguenti otteniamo

In[ ]:= $\text{LLA}\left[3\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right),\ 6\sqrt{2},\ \frac{5\pi}{12}\right]$ // FullSimplify

Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{5\pi}{12} & 6\sqrt{2+\sqrt{3}} \\ \frac{\pi}{4} & 6\sqrt{2} \\ \frac{\pi}{3} & 6\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

mentre nel caso che sia

In[ ]:= $\text{LLA}\left[6\sqrt{2},\ 3\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right),\ \frac{5\pi}{12}\right]$

Out[ ]= NE

il triangolo addirittura non esiste. Utilizzando l'opzione "deg"

In[ ]:= $\text{LLA}\left[3\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right),\ 6\sqrt{2},\ \frac{5\pi}{12},\ \text{"deg"}\right]$ // N

Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 75. & 11.5911 \\ 45. & 8.48528 \\ 60. & 10.3923 \end{pmatrix}$$

mentre, in radianti

In[ ]:= $\left\{\text{LLA}\left[3\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right),\ 6\sqrt{2},\ \frac{5\pi}{12}\right],\ \text{LLA}\left[3\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right),\ 6\sqrt{2},\ \frac{5\pi}{12},\ \text{"rad"}\right]\right\}$ // N

Out[ ]= $\left\{\begin{pmatrix} 1.309 & 11.5911 \\ 0.785398 & 8.48528 \\ 1.0472 & 10.3923 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1.309 & 11.5911 \\ 0.785398 & 8.48528 \\ 1.0472 & 10.3923 \end{pmatrix}\right\}$